

Mémoire de première année.

---

# DES FORMES MODULAIRES À LA THÉORIE DES CORDES.

---

Une application des formes modulaires.

Une introduction à la théorie des cordes.

Filière :  
Encadrant de mathématiques :  
Directeur du stage de physique :  
Lieu de travail de mathématiques :  
Lieu du stage de physique :

Double-cursus mathématiques-physique  
Quentin GUIGNARD  
Hervé PARTOUCHE  
DMA, École Normale Supérieure  
CPHT, École Polytechnique

# INTRODUCTION.

CE mémoire de première année de l'École Normale Supérieure s'inscrit dans le cadre du double-cursus mathématiques et physique. Pour cela, il comporte deux composantes et deux encadrants. La première est en mathématiques et consiste en la rédaction d'un mémoire durant le second semestre. Elle a été réalisée sous la direction de Quentin GUIGNARD au sein du Département de Mathématiques et Applications (DMA) de l'École Normale Supérieure. La seconde partie est en physique et consiste en un stage d'une durée d'un mois pendant l'été. Celui-ci a été réalisé au Centre de Physique Théorique (CPHT) de l'École Polytechnique, sous la direction de Hervé PARTOUCHE.

LA composante mathématique se propose d'étudier le domaine des formes modulaires. Le premier chapitre en sera une introduction. On définira les formes modulaires en mettant en avant qu'il s'agit d'une symétrie, *i.e.* l'étude de l'invariance sous un certain groupe, le groupe modulaire. On étudiera plus précisément les formes modulaire liées au groupe modulaire plein, qui peuvent être entièrement caractérisées et forment des espaces vectoriels de dimension finie. Ensuite on observera le cas plus compliqué des sous-groupes de congruence, où l'on avancera certaines propriétés. Enfin, on regardera plus en détail une famille de fonctions, nommées les fonctions théta. Notamment, on déterminera leurs transformations sous l'action des générateurs du groupe modulaire. Dans le deuxième chapitre, on travaillera sur une application des formes modulaires. Le problème est celui de la compacité optimale, ici posé en dimension huit. On commencera par introduire les outils nécessaires, pour lesquels le premier chapitre sera bien utile. De plus, nous démontrerons le théorème de COHN-ELKIES qui offre une majoration de la compacité offerte par l'étude de fonctions particulière et de leur transformée de FOURIER. Nous exhiberons ensuite un réseau particulier qui sera optimal. Enfin, nous démontrerons le théorème de VIAZOVSKA qui construit la fonction nécessaire pour obtenir la majoration souhaitée dans le théorème précédent. De tout cela, nous pourrions conclure sur la compacité optimale dans cette dimension.

DANS la composante physique, on se donne pour pari d'introduire la théorie des cordes de façon élémentaire. On évitera ainsi autant que possible d'utiliser des résultats issues de théories dépassant le niveau de la licence suivie et qui sont souvent considérés comme connus dans les ouvrages de théorie des cordes. On

commencera par construire la théorie à l'aide de l'action de POLYAKOV que l'on introduira progressivement, avant d'en étudier les symétries. Puis, nous quantifierons cette théorie afin d'obtenir une théorie quantique. Cela nous permettra d'étudier le spectre d'un boson libre et de conclure quant à la dimension nécessaire à la théorie. Nous noterons au passage des atouts et difficultés de la théorie. Dans la troisième section, nous proposerons une autre approche, les théories conformes. Nous verrons qu'elles permettent d'obtenir les mêmes résultats avec des méthodes bien différentes. Nous commencerons également à comprendre pourquoi les formes modulaires interviennent en théorie des cordes. Au passage, nous prendrons soin de déterminer la fonction de partition, qui contient toutes les informations de la théorie libre. Nous proposerons enfin deux développements à cette première théorie. D'une part, la compactification de dimensions. Celle-ci permet tout d'abord d'offrir une réponse au paradoxe du grand nombre de dimensions, qui ne semble pas physique. Ensuite, elle permet de mettre en avant de nouvelles symétries, notamment l'équivalence entre un univers très petit et très grand, ce qui rend impossible une théorie du *big bang* par exemple. Pour finir, elle permet le calcul explicite de la fonction de partition dans le cas d'une interaction toroïdale. On expliquera au passage pourquoi la théorie des cordes obtient une énergie du vide qui est bien finie et une intuition qualitative de la raison pour laquelle elle autorise une gravité quantique. Une autre direction est l'ajout de fermions à la théorie. Nous proposerons de nouveau une quantification et une dérivation de la fonction de partition dans ce cas. Au passage on constatera que la dimension change par rapport à la corde bosonique.

P OUR finir avec cette introduction, j'aimerais remercier tous ceux qui ont rendu possible ce mémoire en consacrant du temps afin de m'encadrer. Aussi, j'aimerais remercier chaleureusement mon tuteur à l'ENS Michel BAUER ainsi que mes encadrants, Quentin GUIGNARD et Hervé PARTOUCHE.

Baptiste COQUINOT.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>I Mathématiques : Une application des formes modulaires.</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction aux formes modulaires.</b>	<b>7</b>
I. Fonctions et formes modulaires. . . . .	7
i) ACTION SUR LE DEMI-PLAN DE POINCARÉ. . . . .	7
ii) CAS DE $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	9
iii) SOUS-GROUPES DE CONGRUENCES. . . . .	12
iv) FORMES ET FONCTIONS MODULAIRES. . . . .	13
II. Formes modulaires sur $\Gamma$ . . . . .	14
i) SÉRIES D'EISENSTEIN. . . . .	14
ii) CLASSIFICATION DES FORMES MODULAIRES ET ELLIPTIQUES. . . . .	18
iii) FONCTIONS MODULAIRES DE POIDS NUL. . . . .	21
iv) DÉVELOPPEMENT DE $\Delta$ EN $\infty$ . . . . .	22
III. Formes modulaires sur des sous-groupes de congruence de $\Gamma$ . . . . .	23
i) PREMIÈRES PROPRIÉTÉS. . . . .	23
ii) QUELQUES CAS PARTICULIERS. . . . .	25
iii) CARACTÈRES DE DIRICHLET. . . . .	28
IV. Les fonctions théta. . . . .	31
i) DÉFINITION ET PREMIÈRES FORMULES. . . . .	31
ii) SYMBOLE DE LEGENDRE. . . . .	35
iii) TRANSFORMATION DE LA FONCTION $\Theta$ . . . . .	36
<b>2 Compacité optimale en dimension huit.</b>	<b>41</b>
I. Construction des fonctions utiles. . . . .	42
i) INTRODUCTION. . . . .	42

ii)	VALEUR PROPRE +1 DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. . . . .	45
iii)	VALEUR PROPRE -1 DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. . . . .	48
II.	Problème de la compacité optimale. . . . .	51
i)	THÉORÈME DE COHN-ELKIES. . . . .	51
ii)	THÉORÈME DE VIAZOVSKA. . . . .	52
<b>II</b>	<b>Physique : Une introduction à la théorie des cordes.</b>	<b>55</b>
<b>3</b>	<b>Introduction à la théorie des cordes.</b>	<b>56</b>
I.	Théorie classique des cordes. . . . .	57
i)	LA PARTICULE PONCTUELLE. . . . .	57
ii)	ACTION DE NAMBU-GOTO. . . . .	59
iii)	ACTION DE POLYAKOV. . . . .	61
iv)	SYMÉTRIES DE L’ACTION ET JAUGE CONFORME. . . . .	62
II.	Quantification de la corde bosonique. . . . .	64
i)	DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES D’OSCILLATEURS. . . . .	64
ii)	COMMUTATIVITÉ ET CONTRAINTES DE VIRASORO. . . . .	66
iii)	QUANTIFICATION CANONIQUE. . . . .	67
iv)	QUANTIFICATION DANS LE CÔNE-LUMIÈRE. . . . .	68
v)	SPECTRE DE LA CORDE BOSONIQUE. . . . .	70
III.	Théorie conforme des champs. . . . .	72
i)	INTRODUCTION. . . . .	72
ii)	TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION. . . . .	73
iii)	DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LAURENT. . . . .	76
iv)	FONCTION DE PARTITION. . . . .	77
IV.	compactification toroïdale et énergie du vide. . . . .	78
i)	COMPACTIFICATION D’UNE DIMENSION POUR LA CORDE FERMÉE. . . . .	78
ii)	COMPACTIFICATION DE PLUSIEURS DIMENSIONS POUR LA CORDE FERMÉE. . . . .	79
iii)	FONCTION DE PARTITION. . . . .	81
iv)	INTERACTION TOROÏDALE. . . . .	81
V.	Supercordes. . . . .	84
i)	ACTION ET JAUGE SUPER-CONFORME. . . . .	84
ii)	QUANTIFICATION. . . . .	87
iii)	FONCTION DE PARTITION. . . . .	89
	<b>Conclusion.</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie.</b>	<b>94</b>

Première partie

Mathématiques :  
Une application des formes modulaires.

# QUELQUES NOTATIONS.

INTRODUISONS quelques notations pour toute cette partie :

- On notera  $<$  soit la relation *est plus petit que* pour des réels, soit la relation *est un sous-groupe de* pour des groupes. On note également  $\triangleleft$  *est un sous-groupe distingué de*.
- On notera  $GL_2^+(\mathbb{R})$  le groupe des matrices carrées de taille 2 de déterminant strictement positif, et  $SL_2(\mathbb{R})$  celles étant de plus de déterminant unitaire.
- Si  $z$  est un nombre complexe, on notera  $\Re(z)$  sa partie réelle et  $\Im(z)$  sa partie imaginaire. On notera de plus  $\bar{z}$  son conjugué.
- Si  $n$ ,  $m$  et  $N$  sont des entiers, on notera  $n \equiv m[N]$  ou  $n \equiv m \pmod{N}$  la relation  *$n$  et  $m$  sont congrus modulo  $N$* . D'autre pas, on notera  $n/m$  la relation  *$n$  divise  $m$* .
- On appellera  $\zeta$  la fonction zéta de RIEMANN<sup>1</sup>.
- On posera  $q_N = e^{\frac{2i\pi z}{N}}$  et  $q = q_1 = e^{2i\pi z}$  pour tout complexe  $z$  et tout entier naturel  $N$ .

---

1. Bernhard RIEMANN, mathématicien allemand (1826-1866).

## CHAPITRE

### 1

# INTRODUCTION AUX FORMES MODULAIRES.

LES formes modulaires sont des fonctions complexes vérifiant une certaine symétrie. Pour comprendre celle-ci, rappelons que la droite projective complexe est l'ensemble des droites complexes de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . Cet espace topologique s'identifie à  $\mathbb{C}$  auquel on ajoute un point à l'infini. D'autre part, on peut faire agir des groupes matriciels sur cet espace, permutant les droites. Finalement, les formes modulaires ne sont autres que les fonctions sur cet espace projectif qui sont invariantes sous les modifications de l'espace provoquées par certains groupes. On peut donc les interpréter géométriquement comme des fonctions préservant des symétries, représentées par le groupe que l'on fera agir. Mais pour pouvoir étudier correctement ces fonctions, on utilisera l'identification du plan projectif et imposera aux formes modulaires des hypothèses de régularité. On verra alors que finalement, les espaces de telles fonctions sont de petite dimension et peuvent parfois même être totalement déterminés.

NOUS présenterons donc dans ce chapitre une introduction à cette étude, reposant essentiellement sur la troisième partie du livre *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* de Neal KOBLITZ[1].

## I. Fonctions et formes modulaires.

### i) ACTION SUR LE DEMI-PLAN DE POINCARÉ.

**Définition 1** (Sphère de RIEMANN). On définit la sphère de RIEMANN comme l'espace topologique  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , que l'on notera  $S$ , qui s'identifie à la droite projective complexe.

**Définition 2** (Transformation linéaire fractionnaire de la sphère de RIEMANN). On définit comme suit une



action du groupe  $GL_2^+(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{S}$ . Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , on pose pour tout  $z$  appartenant à  $\mathbb{S}$  :

$$\gamma \cdot z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \text{ ou } (z = \infty \text{ et } c = 0) \end{cases}$$

*Remarque.* Cette action est en fait simplement l'action naturelle de  $GL_2^+(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  qui descend au quotient  $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$  identifié à  $\mathbb{S}$ .

$$\text{En effet, si } z \text{ appartient à } \mathbb{C}, \left[ \gamma \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

**Définition 3** (Demi-plan de POINCARÉ). On définit le demi-plan de POINCARÉ<sup>1</sup> comme la partie  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$  de  $\mathbb{S}$ .

**Propriété 4.** Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , et  $z$  appartient à  $\mathbb{C}$ ,  $z \neq -\frac{d}{c}$ , alors

$$\Im(\gamma \cdot z) = \frac{\det(\gamma)}{|cz+d|^2} \Im(z).$$

Notamment :  $\mathbb{H} \subset \mathbb{S}$  est préservé par l'action de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \Im(\gamma \cdot z) &= \Im \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) = \Im \left( \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \right) = \Im \left( \frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2} \right) \\ &= (ad-bc) \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\det(\gamma)}{|cz+d|^2} \Im(z). \end{aligned}$$

□

**Définition 5.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{S}$ . Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $GL_2^+(\mathbb{R})$  et  $k$  un entier, on définit la transportée de  $f$  par  $\gamma$  :

$$f_k^{|\gamma} : z \in \mathbb{H} \longrightarrow \frac{(\det(\gamma))^{\frac{k}{2}}}{(cz+d)^k} f(\gamma \cdot z).$$

**Propriété 6.** Soient  $f$  une application de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{S}$  et  $\gamma_1, \gamma_2$  deux éléments de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , alors on a la relation  $(f_k^{|\gamma_1})^{|\gamma_2} = f_k^{|\gamma_1 \gamma_2}$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un élément de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\frac{d(\gamma \cdot z)}{dz} = \frac{d}{dz} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\det(\gamma)}{(cz+d)^2}.$$

---

1. Henri POINCARÉ, mathématicien et physicien français, polytechnicien (1854-1912).

Ainsi,  $\left(\frac{d(\gamma \cdot z)}{dz}\right)^{\frac{k}{2}} = (\det(\gamma))^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k}$ , i.e.  $f_k^{|\gamma|}(z) = \left(\frac{d(\gamma \cdot z)}{dz}\right)^{\frac{k}{2}} f(\gamma \cdot z)$ . Donc,

$$\begin{aligned} \left(f_k^{|\gamma_1}\right)_k^{|\gamma_2}(z) &= \left(\frac{d(\gamma_2 \cdot z)}{dz}\right)^{\frac{k}{2}} f_k^{|\gamma_1|}(\gamma_2 \cdot z) = \left(\frac{d(\gamma_2 \cdot z)}{dz}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{d(\gamma_1 \gamma_2 \cdot z)}{d(\gamma_2 \cdot z)}\right)^{\frac{k}{2}} f(\gamma_1 \gamma_2 \cdot z) \\ &= \left(\frac{d(\gamma_1 \gamma_2 \cdot z)}{dz}\right)^{\frac{k}{2}} f(\gamma_1 \gamma_2 \cdot z) = f_k^{|\gamma_1 \gamma_2|}(z) \end{aligned}$$

□

**Définition 7** (Domaine fondamental). Soit  $G < GL_2^+(\mathbb{R})$  un sous-groupe. On définit sur  $\mathbb{H}$  la relation d'équivalence suivante :  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}, (z_1 \stackrel{G}{\sim} z_2) \iff (z_1 \in Gz_2)$ . On note alors  $G \backslash \mathbb{H}$  le quotient de  $\mathbb{H}$  par cette relation d'équivalence.

On dit qu'une partie  $\mathfrak{F}$  de  $\mathbb{H}$  est un domaine fondamental pour  $G$  si :

- (i)  $\mathfrak{F}$  est fermé.
- (ii) Pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ , il existe un élément  $f$  de  $\mathfrak{F}$  tel que  $z \stackrel{G}{\sim} f$
- (iii) Si  $f_1, f_2$  sont deux éléments de  $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ , alors  $f_1 \stackrel{G}{\sim} f_2 \implies f_1 = f_2$

*Remarque.* (i) Si possible, on préférera  $\mathfrak{F}$  connexe et vérifiant  $\overset{\circ}{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$ .

(ii) Notons que l'on impose aucune condition d'unicité sur le bord de  $\mathfrak{F}$ .

## ii) CAS DE $SL_2(\mathbb{Z})$ .

**Propriété 8.** On peut restreindre l'action de  $GL_2^+(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{S}$  à  $SL_2(\mathbb{R})$ .

Le noyau de cette action est  $\{-id, id\}$ .

Notamment :  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{-id, id\}$  agit fidèlement sur  $\mathbb{S}$ .

*Démonstration.* On a :

$$\left(\forall z \in \mathbb{C}, \frac{az + b}{cz + d} = z\right) \implies (\forall z \in \mathbb{C}, cz^2 + (d - a)z - b = 0) \implies (b = c = 0 \text{ et } a = d).$$

Si de plus  $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$ , alors  $ad = 1$ , et  $\gamma \in \{-id, id\}$ .

Réciproquement, si  $\gamma$  appartient à  $\{-id, id\}$ , on a bien  $\gamma \cdot z = z$  pour tout élément  $z$  de  $\mathbb{S}$ . □

**Définition 9** (Groupe modulaire plein). On définit le groupe modulaire plein :  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) < SL_2(\mathbb{R})$ .

Si  $G$  est un sous-groupe de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , on notera  $\bar{G} = \begin{cases} G/\{-id, id\} & \text{si } -id \in G \\ G & \text{sinon} \end{cases}$

Notamment, on définit  $\bar{\Gamma} = \Gamma/\{-id, id\} = PSL_2(\mathbb{Z}) < PSL_2(\mathbb{R})$ .

On a naturellement que  $\Gamma$  agit sur  $\mathbb{H}$ , de même que  $\bar{\Gamma}$ , et cette dernière action est fidèle.

**Théorème 10.** La partie  $\mathfrak{F}_\Gamma = \{z \in \mathbb{H}, -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq -\frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$  de  $\mathbb{H}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma$ .

*Remarque.* Les deux sommets de ce domaine sont  $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $-\bar{\omega} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Définition 11.** On pose  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Notons que  $T$ , et  $S$  sont des éléments de  $\Gamma$ .

De plus, si  $z$  est un élément de  $\mathbb{H}$ , on a :  $T \cdot z = z + 1$  et  $S \cdot z = -\frac{1}{z}$ .

*Démonstration du théorème 10.* Posons  $\Gamma'$  un sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $S$  et  $T$ . Notons que si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice de  $\Gamma$ , alors  $\mathcal{J}(\gamma \cdot z) = \frac{\mathcal{J}(z)}{|cz+d|^2}$ , pour  $z \in \mathbb{H}$ , d'après la propriété 4.

Soit  $z$  un élément de  $\mathbb{H}$ . On va construire  $\gamma \in \Gamma'$  tel que  $\gamma \cdot z \in \mathfrak{F}_\Gamma$ , et ainsi montrer l'hypothèse (ii) de la définition de *domaine fondamental* (7).

On a  $c, d \in \mathbb{Z}$ , donc on peut construire  $\delta > 0$  minorant  $\left\{ |cz + d|, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma' \right\}$ . Ce qui permet de choisir un  $\gamma$  dans  $\Gamma'$  qui maximise  $\mathcal{J}(\gamma \cdot z)$ . Quitte à changer  $\gamma$  en  $T^j \gamma$  pour un certain entier  $j$ , ce qui laisse  $\mathcal{J}(\gamma \cdot z)$  inchangé, on peut supposer  $-\frac{1}{2} \leq \Re(\gamma \cdot z) \leq \frac{1}{2}$ . Ainsi, si  $\gamma \cdot z \notin \mathfrak{F}_\Gamma$ , cela signifie que l'on a  $|\gamma \cdot z| < 1$ . Mais alors  $\mathcal{J}(S\gamma \cdot z) = \mathcal{J}\left(\frac{\gamma \cdot z}{|\gamma \cdot z|^2}\right) > \mathcal{J}(\gamma \cdot z)$ , ce qui est absurde.

On a donc montré que  $\gamma \cdot z \in \mathfrak{F}_\Gamma$  et donc l'hypothèse (ii) de la définition de *domaine fondamental* (7).

Vérifions l'hypothèse (iii) de la définition de *domaine fondamental* (7). Soit  $z_1, z_2$  sont deux éléments de  $\mathfrak{F}_\Gamma$  tels que  $z_1 \stackrel{\Gamma}{\sim} z_2$ . On a donc  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\Gamma$  telle que  $z_2 = \gamma \cdot z_1$ .

On peut de plus supposer  $\mathcal{J}(z_2) \geq \mathcal{J}(z_1)$ , ce qui entraîne  $|cz_1 + d| \leq 1$ . Or,  $z_1 \in \mathfrak{F}$  et  $c, d \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|c| \leq |c\mathcal{J}(z_1)| = |\mathcal{J}(cz_1 + d)| \leq |cz_1 + d| \leq 1$$

Donc  $c$  appartient à  $\{-1, 0, 1\}$ . De même, l'inégalité sur la partie réelle assure que  $d$  appartienne à  $\{-1, 0, 1\}$ . On peut donc distinguer les différents cas.

- $c = 0$  et  $d = \pm 1$ . Comme  $ad - bc = 1$ , on a  $a = d$  Donc  $\gamma = \pm \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , i.e.  $\gamma = \pm T^j$  pour un certain entier  $j$ .

Comme  $\gamma \cdot \mathfrak{F}_\Gamma \cap \mathfrak{F}_\Gamma \neq \emptyset$ , on a soit  $j = 0$  et  $z_1 = z_2$ , soit  $j = \pm 1$  et  $z_1, z_2$  sont sur les bords opposés de  $\mathfrak{F}_\Gamma : -\frac{1}{2} + i\mathbb{R}, \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$ .

- $c = \pm 1$  et  $d = 0$ . Comme  $ad - bc = 1$ ,  $b = -c$ .

Notons que  $T^j S = \begin{pmatrix} j & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  si  $j$  est un entier. Donc on a  $j$  tel que  $\gamma = \pm T^j S$ .

D'autre part, on a toujours  $|cz_1 + d| \leq 1$ , i.e.  $|z_1| \leq 1$ , et donc  $z_1 \in \mathfrak{F}_\Gamma$  est de la forme  $z_1 = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Alors  $\gamma \cdot z = e^{i(\pi-\theta)} + j$ .

Soit  $j = 0$  et  $z_1, z_2$  sont sur le cercle unité, symétriques par rapport à  $i\mathbb{R}$ . Soit  $j = \pm 1$  et  $z_1 = z_2 = \omega$  ou  $-\bar{\omega}$ .

- $c = d = \pm 1$ . Comme  $ad = bc = 1$ , on a  $a - b = c$ . Donc  $\gamma = \begin{pmatrix} a & a-c \\ c & c \end{pmatrix}$ .

Or, on calcule :  $T^j S T = \begin{pmatrix} j & j+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  si  $j$  est un entier. D'où  $\gamma = \pm T^j S T$  pour un certain entier  $j$ .

D'autre part, on a toujours  $|cz_1 + d| \leq 1$ , i.e.  $|z_1 + 1| \leq 1$ . Ce qui impose  $z_1 = -\bar{\omega}$ . Alors  $ST \cdot z_1 = z_1$ . Finalement, soit  $j = 0$  et  $z_1 = z_2$ , soit  $j = 1$  et  $z_2 = \omega$ .

- $c = -d = \pm 1$ . Cette situation est identique au cas précédent en permutant  $\omega$  et  $-\bar{\omega}$ .

Finalement, on a bien montré l'hypothèse (iii) de la définition de *domaine fondamental* (7) et donc le théorème 10, mais aussi bien plus!

□

**Corollaire 12.** *Des éléments  $z_1$  et  $z_2$  de  $\partial \mathfrak{F}_\Gamma$  sont  $\Gamma$ -équivalents si et seulement si ils sont symétriques par rapport à  $i\mathbb{R}$ .*

**Corollaire 13.** *Soit  $z$  appartenant à  $\mathfrak{F}_\Gamma$ , alors son stabilisateur  $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \text{ tel que } \forall z \in \mathbb{H} \gamma \cdot z = z\}$  est réduit à  $\{\pm \text{id}\}$ , sauf si :*

- (i)  $z = i$ , auquel cas  $\Gamma_z = \{\pm \text{id}, \pm S\}$ .
- (ii)  $z = \omega$ , auquel cas  $\Gamma_z = \{\pm \text{id}, \pm TS, \pm (TS)^2\}$ .
- (iii)  $z = \omega$ , auquel cas  $\Gamma_z = \{\pm \text{id}, \pm ST, \pm (ST)^2\}$ .

**Corollaire 14.**  $\bar{\Gamma}$  est engendré par  $T$  et  $S$ .

*Démonstration.* Soit  $z = 2i \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ , et soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$ . On a montré que l'on pouvait produire  $\gamma' \in \Gamma'$  tel que  $\gamma' \cdot (\gamma \cdot z) \in \mathfrak{F}$ . Mais  $z$  vit dans  $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ , ce qui implique que  $\gamma'\gamma = \pm \text{id}$ , i.e.  $\gamma = \pm \gamma'^{-1} \in \Gamma'$ . D'où  $\bar{\Gamma} = \Gamma'$ .

□

**Propriété 15.** *Soit deux sous-groupes  $\Gamma'' < \Gamma' < \Gamma$  d'indice  $[\Gamma'' : \Gamma'] = n$  fini. On peut écrire  $\Gamma' = \bigsqcup_{i=1}^n \alpha_i \Gamma''$  une union disjointe où les  $\alpha_i$  sont des éléments de  $\Gamma'$ . Alors si  $\mathfrak{F}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma'$  tel que  $\mathfrak{F} \subset \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ , on a que  $\mathfrak{F}' = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i^{-1} \cdot \mathfrak{F}$  est un domaine fondamental pour  $\Gamma''$ .*

Notons que l'hypothèse topologique est vérifiée pour le domaine fondamental de  $\Gamma$  précédant :  $\mathfrak{F}_\Gamma \subset \overset{\circ}{\mathfrak{F}}_\Gamma$ .

*Démonstration.* Vérifions les trois hypothèses de la définition de *domaine fondamental* (7) :

- (i) Puisque  $\mathfrak{F}'$  est défini uniquement via l'action de groupe et une union finie, le fait que  $\mathfrak{F}$  soit fermé entraîne que  $\mathfrak{F}'$  l'est aussi.
- (ii) Si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$ , il existe  $\gamma \in \Gamma'$  tel que  $\gamma \cdot z \in \mathfrak{F}$ . Mais on a  $i$  tel que  $\gamma = \alpha_i \gamma', \gamma' \in \Gamma''$ . Alors  $\gamma' \cdot z \in \alpha_i^{-1} \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ .
- (iii) Soit  $z_1, z_2$  deux éléments de  $\overset{\circ}{\mathfrak{F}'}$  tels que  $z_1 \sim^{\Gamma''} z_2$ . D'autre part, on a donc  $\gamma \in \Gamma''$  tel que  $\gamma \cdot z_1 = z_2$ . On a  $i$  et  $j$  tels que  $\alpha_i \cdot z_1 \in \mathfrak{F}$  et  $\alpha_j \cdot z_2 \in \mathfrak{F}$ .

- Premier cas :  $\alpha_i \cdot z_1 \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$  et  $\alpha_j \cdot z_2 \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ . Comme  $\mathfrak{F}$  est un domaine fondamental,  $\alpha_i \cdot z_1 = \alpha_j \cdot z_2$ . Ainsi,  $\alpha_i \cdot z_1 = \alpha_j \gamma \alpha_i^{-1} \cdot (\alpha_i \cdot z_1)$ , entraînant  $\alpha_j \gamma \alpha_i^{-1} = \text{id}$ . Mais  $\gamma \in \Gamma''$ , i.e.  $\alpha_i \in \alpha_j \Gamma''$ , ce qui, comme les  $(\alpha_i)$  sont un système de représentants des classes d'équivalence sous l'action de  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$ , assure  $i = j$ . Alors  $z_1 = z_2$ .
- Second cas :  $\alpha_i \cdot z_1 \in \partial \mathfrak{F}$ . Notons que l'application de  $\gamma$  est continue. On peut donc construire  $(z_1^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \left( \alpha_i^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{F}} \right)^{\mathbb{N}}$  tel que  $z_1^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} z_1$  et qu'en posant  $\forall k \in \mathbb{N}, z_2^k = \gamma \cdot z_1^k$ , on ait  $(z_2^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \left( \overset{\circ}{\mathfrak{F}} \right)^{\mathbb{N}}$ . Donc pour tout entier  $k$ , il existe  $i_k$  tel que  $\alpha_{i_k} \cdot z_2^k \in \mathfrak{F}$ . On extrait de nouveau, en notant que  $\alpha_i^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$  est ouvert. A  $k$  fixé, on a  $(z_2^{k,l})_{l \in \mathbb{N}} \in \left( \alpha_{j_k}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{F}} \right)^{\mathbb{N}}$ , avec  $z_2^{k,l} \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} z_2^k$  et  $(z_1^{k,l} = \gamma^{-1} \cdot z_2^{k,l})_{l \in \mathbb{N}} \in \left( \alpha_i^{-1} \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{F}} \right)^{\mathbb{N}}$ .

A  $k$  et  $l$  donné, on est dans le premier cas, donc  $z_1^{k,l} = z_2^{k,l}$ . On passe à la limite  $l \rightarrow +\infty$  et en notant que l'application de  $\gamma^{-1}$  est continue, on obtient  $z_1^k = z_2^k$ . Puis de même en passant à la limite  $k \rightarrow +\infty$ , ce qui donne  $z_1 = z_2$ . □

**Définition 16.** On définit :  $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\} \cup \mathbb{Q} \subset \mathbb{S}$ . Les éléments de  $\{\infty\} \cup \mathbb{Q}$  sont appelés pointes.

**Propriété 17.**  $\Gamma$  agit sur  $\bar{\mathbb{H}}$  et agit transitivement sur les pointes.

*Démonstration.* Soit  $\frac{a}{c}$  un élément de  $\mathbb{Q}$ , avec  $a \wedge b = 1$ . Par le théorème de BÉZOUT<sup>2</sup> on a des entiers  $b$  et  $c$  tels que  $ad - bc = 1$ . Soit alors  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ , on a  $\gamma \cdot \infty = \frac{a}{c}$ .

Donc pour tout rationnel  $q$ ,  $q \stackrel{\Gamma}{\sim} \infty$ . Réciproquement, l'application d'un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  sur  $\infty$  donne une pointe. □

*Remarque.* Si  $\Gamma' < \Gamma$  est un sous-groupe, celui-ci agit bien sur les pointes, mais *a priori* pas transitivement.

**Définition 18.** On munit  $\bar{\mathbb{H}}$  d'une topologie comme suit :

- (i) On étend la topologie de  $\mathbb{H}$  qui découle naturellement de celle de  $\mathbb{C}$ .
- (ii) On se donne une base de voisinages ouverts de  $\infty$  :  $(\{z \in \mathbb{H}, \Im(z) > \mathcal{C}\} \cup \{\infty\})_{\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{++}}$ .
- (iii) Si  $q$  appartient à  $\mathbb{Q}$ , on a une matrice  $\gamma$  de  $\Gamma$  telle que  $\gamma \cdot \infty = q$ . On déplace alors la base de voisinages ouverts de  $\infty$ , *i.e.* on pose comme base de voisinages ouvertes :  $(\{\gamma \cdot z, z \in \mathbb{H}, \Im(z) > \mathcal{C}\} \cup \{q\})_{\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{++}}$ .

Notons que pour cette topologie,  $ix \xrightarrow[x \in \mathbb{R}]{x \rightarrow +\infty} \infty$ .

On étend la définition de *domaine fondamental* (7) en remplaçant naturellement  $\mathbb{H}$  par  $\bar{\mathbb{H}}$ , et ce, pour la topologie que l'on vient de définir. On parle alors de domaine fondamental de  $\bar{\mathbb{H}}$ .

On a avec cette définition que  $\bar{\mathfrak{F}}_\Gamma = \bar{\mathfrak{F}}_\Gamma \cup \{\infty\}$  est un domaine fondamental de  $\bar{\mathbb{H}}$  pour  $\Gamma$ . On le munit de la topologie quotient de  $\bar{\mathbb{H}}$ .

### iii) SOUS-GROUPES DE CONGRUENCES.

**Définition 19** (Sous-groupes de congruence). Soit  $N$  un entier, on définit les sous-groupes de  $\Gamma$  suivant :

$$\begin{cases} \Gamma(N) = \ker (g \in \Gamma \rightarrow \bar{g} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, a \equiv d \equiv 1[N] \text{ et } b \equiv c \equiv 0[N] \right\} \\ \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, c \equiv 0[N] \right\} \\ \Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, a \equiv 1[N] \text{ et } c \equiv 0[N] \right\} \end{cases}$$

On nomme  $\Gamma(N)$  sous-groupe de congruence principal modulo  $N$ .

Un sous-groupe  $G < \Gamma$  est dit sous-groupe de congruence de niveau  $N$  si  $\Gamma(N) < G$ . Il est simplement dit sous-groupe de congruence s'il existe un entier  $N$  tel que  $\Gamma(N) < G$ .

2. Etienne BÉZOUT, mathématicien français (1730-1783).

*Remarque.* (i) Plus schématiquement, on peut comprendre ces groupes par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\mathbf{N}) = \left\{ \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{N}} \right\} \\ \Gamma_0(\mathbf{N}) = \left\{ \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{N}} \right\} \\ \Gamma_1(\mathbf{N}) = \left\{ \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\mathbf{N}} \right\} \end{array} \right.$$

(ii) On a un sous-groupe distingué dans  $\Gamma : \Gamma(\mathbf{N}) \triangleleft \Gamma$  car il s'écrit comme le noyau d'un morphisme.

(iii) Si  $\mathbf{N}$  est un entier supérieur ou égal à 2, on a simplement :  $\overline{\Gamma(\mathbf{N})} = \Gamma(\mathbf{N})$ .

(iv) Si  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  sont deux entiers tels que  $\mathbf{N}$  divise  $\mathbf{M}$ , on a l'inclusion  $\Gamma(\mathbf{M}) < \Gamma(\mathbf{N})$ .

(v) si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $\Gamma_1(\mathbf{N})$ , alors  $d \equiv 1[\mathbf{N}]$ . En effet, si  $\bar{n}$  désigne la classe de congruence de  $n$  modulo  $\mathbf{N}$ , on peut écrire :  $ad - bc = 1$  et  $\bar{c} = \bar{0}$ ,  $\bar{a} = \bar{1}$ , donc  $\bar{d} = \bar{1}$ .

(vi) On a l'inclusion suivante :  $\Gamma_1(\mathbf{N}) < \Gamma_0(\mathbf{N})$ .

#### iv) FORMES ET FONCTIONS MODULAIRES.

**Définition 20.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{S}$ . Soit  $\Gamma' < \Gamma$  un sous-groupe de congruence. Soit  $k$  un entier. On dit que  $f$  est une fonction modulaire de poids  $k$  pour  $\Gamma'$  si :

(i) Pour toute matrice  $\gamma$  de  $\Gamma'$ , on a  $f_k^\gamma = f$ . C'est l'hypothèse d'invariance.

(ii)  $f$  est méromorphe sur  $\mathbb{H}$ .

(iii) On a un entier  $\mathbf{N}$  tel que  $\Gamma(\mathbf{N}) < \Gamma'$  et pour toute matrice  $\gamma$  de  $\Gamma$ ,  $f_k^\gamma$  se développe sous la forme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q_N^n$  où  $q_N = e^{\frac{2i\pi z}{N}}$  et  $a_n = 0$  à partir d'un certain rang lorsque  $n \rightarrow -\infty$ . On dit que  $f$  est méromorphe en la pointe  $\gamma \cdot \infty$ .

On peut renforcer ces hypothèses de régularité en demandant  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{H}$  et  $a_n = 0$  dès que  $n < 0$ .  $f$  est alors dite forme modulaire. Si de plus  $a_0 = 0$ ,  $f$  est dite forme elliptique.

On définit les ensembles suivants :  $\mathcal{F}_k(\Gamma') = \{f \text{ fonction modulaire de poids } k \text{ pour } \Gamma'\}$ ,  $\mathcal{M}_k(\Gamma') = \{f \text{ forme modulaire de poids } k \text{ pour } \Gamma'\}$  et  $\mathcal{E}_k(\Gamma') = \{f \text{ forme elliptique de poids } k \text{ pour } \Gamma'\}$ .

*Remarque.* (i) L'hypothèse de régularité en  $\infty$  porte sur les transportées de  $f$  par n'importe quel élément de  $\Gamma$  et non pas seulement de  $\Gamma'$ .

(ii) L'entier  $\mathbf{N}$  utilisé dans la point (ii) de la définition n'est *a priori* pas fixé, il pourrait donc dépendre de  $f$ . Notons néanmoins que si ce point est vérifié pour un certain  $\mathbf{N}$ , il l'est pour tous les ses multiples. En effet, on a bien l'inclusion des sous-groupes de congruence d'un part, et l'on peut réécrire le développement de  $f$  en choisissant nuls les coefficients associés aux termes ajoutés dans la somme d'autre part. En pratique, on travaillera donc généralement avec un  $\mathbf{N}$  minimal.

(iii) Comme  $T^{\mathbf{N}} \in \Gamma(\mathbf{N})$ ,  $f_k^\gamma$  est  $\mathbf{N}$ -périodique sur  $\mathbb{H}$  et méromorphe, ce qui entraîne l'existence d'un tel développement de LAURENT<sup>3</sup> en  $\infty$ . L'hypothèse (ii) de la définition porte donc uniquement sur la régularité en demandant que  $f$  soit méromorphe en  $\infty$ .

3. Pierre Alphonse LAURENT, mathématicien français, polytechnicien (1813-1854).

- (iv) Les trois ensembles que l'on a défini sont des espaces vectoriels complexes. Le produit de deux fonctions modulaires de poids respectifs  $k$  et  $k'$  et aussi une fonction modulaire, de poids  $k + k'$ . Il en va de même pour les formes modulaires et les formes elliptiques. Le quotient de deux fonctions modulaires de poids respectifs  $k$  et  $k'$  et aussi une fonction modulaire, de poids  $k - k'$ . Il en va de même pour les formes modulaires si celles-ci ne s'annulent pas sur  $\mathbb{H}$  ni en  $\infty$ , *i.e.* la limite en  $\infty$  est non-nulle.
- (v) Si l'on se donne un sous-groupe  $\Gamma'' < \Gamma'$ , on a  $\mathcal{F}_k(\Gamma') \subset \mathcal{F}_k(\Gamma'')$ . Il en va de même pour les formes modulaires et les formes elliptiques.
- (vi) Si  $k$  est impair et  $-\text{id} \in \Gamma'$ , l'unique fonction modulaire est 0. En effet, on a  $f = f_k^{|\text{id}|} = -f$ .

**Propriété 21.** *Si  $f$  appartient à  $\mathcal{F}_k(\Gamma')$  et  $\gamma_0$  est un élément de  $\Gamma$ , alors  $f_k^{|\gamma_0|} \in \mathcal{F}_k(\gamma_0^{-1}\Gamma'\gamma_0)$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord,  $\gamma_0^{-1}\Gamma'\gamma_0$  est bien un sous-groupe de congruence car  $\Gamma(\mathbb{N}) \triangleleft \Gamma$  implique  $\Gamma(\mathbb{N}) < \gamma_0^{-1}\Gamma'\gamma_0$ .

Si  $\gamma'$  appartient à  $\Gamma'$ , alors  $(f_k^{|\gamma_0|})^{|\gamma_0^{-1}\gamma'\gamma_0|} = (f_k^{|\gamma'|})^{|\gamma_0|} = f_k^{|\gamma_0|}$ . De plus, les hypothèses (ii) et (iii) de la définition 20 sont bien conservées. □

**Propriété 22.** *L'ordre du développement à l' $\infty$  de  $f_k^{|\gamma_0|}$ , *i.e.* avec les notations de la définition 20, le plus petit entier  $n$  tel que  $a_n$  est non nul, ne dépend que de la classe de  $\Gamma'$ -équivalence de  $\gamma_0 \cdot \infty$ . De plus, si cet ordre est zéro, le coefficient associé, *i.e.* avec les notations de la définition 20,  $a_0$  ne varie dans la classe  $\Gamma'$ -équivalence qu'au plus d'un facteur multiplicatif  $(-1)^k$ .*

*Notamment, il suffit de vérifier la condition (iii) de la définition 20 sur un système de représentants des classes de  $\Gamma'$ -équivalence des pointes. Ainsi, si  $\Gamma' = \Gamma$ , on se contentera de regarder ce point en  $\infty$ .*

*Démonstration.* Soit  $\gamma_1, \gamma_2$  sont deux matrices de  $\Gamma$  et  $\gamma'$  un élément de  $\Gamma'$  tel que  $\gamma_2 \cdot \infty = \gamma'\gamma_1 \cdot \infty$ . Alors,  $\gamma_2^{-1}\gamma'\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  stabilise  $\infty$ . Par construction de l'action, on a donc nécessairement  $c = 0$ . Mais on a alors  $bc = 1$ , puis on obtient un entier  $j$  tel que  $\gamma_2^{-1}\gamma'\gamma_1 = \pm T^j$

Soit  $g(z) = f_k^{|\gamma_2|}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q_N^n$ . Notons que  $f_k^{|\text{id}|} = (-1)^k f$  et  $f_k^{|\gamma'|} = f$ . Ainsi :

$$f_k^{|\gamma_1|}(s) = (\pm 1)^k g_N^{T^{-j}}(s) = (\pm 1)^k g(z - j) = (\pm 1)^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-2i\pi \frac{j}{N}} q_N^n.$$

□

## II. Formes modulaires sur $\Gamma$ .

### i) SÉRIES D'EISENSTEIN.

*Remarque.* On peut tout d'abord appliquer nos premiers résultats généraux au cas particulier de  $\Gamma$ .

- (i) Si  $f$  est une fonction modulaire sur  $\Gamma$ , on a notamment pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ ,  $f(z+1) = f(z)$  et  $f(-\frac{1}{z}) = (-z)^k f(z)$ .
- (ii) Si  $k$  est impair, on a  $\mathcal{F}_k(\Gamma) = \{0\}$ .
- (iii) Pour montrer l'invariance d'une fonction, il suffit de le montrer pour  $T$  et  $S$ .

**Définition 23** (Séries d'EISENSTEIN). Soit  $k \geq 4$  un entier pair. On définit la  $k$ -ième série d'EISENSTEIN<sup>4</sup> :

$$E_k : z \in \mathbb{H} \longrightarrow \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n)^k}.$$

**Propriété 24.** Soit  $k \geq 4$  un entier pair, alors  $E_k \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ .

Notamment : on a construit des formes modulaires pour tout entier  $k \geq 4$  pair.

*Démonstration.* Comme  $k \geq 4$ , la série converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{H}$  et  $y$  est donc holomorphe. En effet, l'application  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow |\alpha z + \beta|$  est une norme pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ . Ainsi par équivalence des normes, on a  $c(z)$  appartenant à  $\mathbb{R}^{+*}$  tel que  $|\alpha z + \beta| \geq c(z)(|\alpha| + |\beta|)$  pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ . Mais si  $K$  est un compact de  $\mathbb{H}$ , l'application  $(z, (\alpha, \beta)) \in K \times \{(a, a) \in \mathbb{R}^2, |a| + |b| = 1\} \longrightarrow |\alpha z + \beta| \in \mathbb{R}^{+*}$  est continue sur un compact. On peut donc considérer son minimum  $c$ , qui est strictement positif et vérifie pour tous entiers  $m, n$  l'identité  $|mz + n| \geq c(|m| + |n|)$ . Ainsi pour tout  $z$  dans  $K$  :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leq \frac{1}{c^k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|m| + |n|)^k}.$$

Sommons alors par  $|m| + |n|$  constant.  $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}, |m| + |n| = j\}$  est de cardinal  $2j + 1$  pour tout entier  $j$ . Finalement :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mz + n|^k} \leq \frac{1}{c^k} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2j+1}{j^k} < +\infty$$

si  $j > 2$ . D'où la convergence normale de la série présente dans  $E_k$  sur tout compact de  $\mathbb{H}$ .

$E_k$  est également holomorphe en  $\infty$  car  $E_k(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^k} = 1$ . En effet, on a déjà justifié l'existence du développement en série de LAURENT en  $\infty$ , seul restait à montrer que  $a_n = 0$  pour tout entier  $n$  strictement négatif. Mais comme  $E_k$  admet une limite finie en  $\infty$ , on a bien montré qu'elle était holomorphe en  $\infty$ .

Soit  $z$  appartenant à  $\mathbb{H}$ . On a :

$$E_k(z+1) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n + m)^k} = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n)^k} = E_k(z)$$

en réindexant la somme sur  $n$ .

Par ailleurs,

$$z^{-k} E_k\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{\left(z\left(-\frac{m}{z} + n\right)\right)^k} = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n)^k} = E_k(z)$$

en permutant les sommes, ce qui est justifié puisque que l'on a convergence normale. □

**Propriété 25.** On pose pour tous entiers naturels  $k$  et  $n$   $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$  et on définit les nombres de BERNOULLI<sup>5</sup>  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par  $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$ . On a alors le développement de  $E_k$  en  $\infty$  suivant :

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

4. Gotthold EISENSTEIN, mathématicien allemand (1823-1852).

5. Jacques BERNOULLI, mathématicien suisse (1654-1705).



*Démonstration.* On a le développement suivant de cotangente :

$$\pi \cotan(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = i\pi \frac{e^{i\pi a} + e^{-i\pi a}}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = i\pi + \frac{2i\pi}{e^{2i\pi a} - 1},$$

si  $a$  est un complexe. Justifions-le. On a  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ . Au vu de son expression, son ordre de croissance est au plus 1. De plus sur l'axe imaginaire, on a  $\sin(ix) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{e^x}{2i}$ , ainsi son ordre de croissance est au plus

1. Donc son ordre de croissance est 1, et l'on peut appliquer le théorème de factorisation d'HADAMARD<sup>6</sup>. Notons pour cela que les zéros de  $\sin$  sont exactement les éléments de  $\pi\mathbb{Z}$ , tous d'ordre 1. On a donc, en associant par paires les zéros :

$$\sin(z) = e^{az+b} z \prod_{n=0}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{\pi n} \right) e^{\frac{z}{\pi n}} \left( 1 + \frac{z}{\pi n} \right) e^{-\frac{z}{\pi n}} = e^{az+b} z \prod_{n=0}^{+\infty} \left( 1 - \left( \frac{z}{\pi n} \right)^2 \right)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux complexes à déterminer. Mais  $\sin'(0) = 1$  et  $\sin''(0) = 0$  entraînent  $a = b = 0$ . Rappelons que le théorème de factorisation d'HADAMARD assure la convergence absolue du produit. Finalement, notons que l'on a simplement  $\cotan = \frac{\sin'}{\sin}$ . La dérivé logarithmique du produit donne alors exactement ce que nous cherchions. On a donc pour  $a$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = i\pi + \frac{2i\pi}{e^{2i\pi a} - 1}.$$

On multiplie cette identité par  $a$  et pose  $x = 2i\pi a$ . Il vient alors :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\frac{x}{2i\pi n}}{\frac{x}{2i\pi n} + 1} + \frac{\frac{x}{2i\pi n}}{\frac{x}{2i\pi n} - 1} \right) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{x}{2i\pi n} \right)^2}{1 - \left( \frac{x}{2i\pi n} \right)^2}.$$

Pour  $|x| < 2\pi$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{x}{2i\pi n} \right)^2}{1 - \left( \frac{x}{2i\pi n} \right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{2i\pi n} \right)^{2m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{2i\pi} \right)^{2m} \zeta(2m).$$

On a ainsi :

$$\frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{x^k}{k!} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{2i\pi} \right)^{2m} \zeta(2m) = 1 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \left( \frac{x}{2i\pi} \right)^k \zeta(k).$$

Donc si  $k > 0$  pair, l'unicité du développement en série entière donne l'identité :  $\zeta(k) = -\frac{1}{2} \frac{(2i\pi)^k}{k!} B_k$ .

D'autre part, on a, pour tout complexe  $a$  tel que  $\Im(a) > 0$  :

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = i\pi + \frac{2i\pi}{e^{2i\pi a} - 1} = i\pi - 2i\pi \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2i\pi n a}.$$

Dérivons  $k-1$  cette identité par rapport à  $a$ . On obtient :

$$\begin{aligned} -(2i\pi)^k \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k-1} e^{2i\pi n a} &= (-1)^{k-1} (k-1)! \left[ \frac{1}{a^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(a+n)^k} + \frac{1}{(a-n)^k} \right) \right] \\ &= -(k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a+n)^k}. \end{aligned}$$

6. Jacques HADAMARD, mathématicien français, normalien (1865-1963).

En posant  $a = mz$  avec  $m > 0$ , on a alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a+n)^k} = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k-1} q^{nm} = -\frac{2k}{B_k} \sum_{d=1}^{+\infty} d^{k-1} q^{dm}.$$

De plus, par symétrie entre  $m$  positif et négatif, on a :

$$E_k(z) = 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^k} = 1 - \frac{2k}{B_k \zeta(k)} \sum_{m,d \in \mathbb{N}^*} d^{k-1} q^{dm} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

□

**Définition 26.** On définit :

$$E_2 : z \in \mathbb{H} \longrightarrow \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2} = 1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^2}.$$

*Remarque.* Notons que la somme sur  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ne converge plus uniformément, nous obligeant à préciser dans quel ordre on somme. De plus, une partie des résultats obtenus précédemment ne sont plus valides. On a par le même calcul que précédemment :  $E_2(z) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) q^n$ . Notamment on a bien que  $E_2$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}$  et en  $\infty$ , et est 1-périodique. En revanche, on a plus l'invariance sous l'action de  $S$ .

**Propriété 27.** Si  $z \in \mathbb{H}$ , on a l'identité :

$$z^{-2} E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = E_2(z) + \frac{12}{2i\pi z}.$$

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de perturber correctement le terme principal dans la série définissant  $E_2$  pour rendre celle-ci absolument convergente. Posons, pour  $z$  dans  $\mathbb{C}$

$$a_{m,n}(z) = \frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)} = \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z) = \frac{1}{mz+n} \left( \frac{1}{mz+n} - \frac{1}{mz+n-1} \right) = -\frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}.$$

Ceci assure, de manière identique à l'étude de la convergence normale dans la démonstration de la propriété 24, l'absolue convergence de :

$$\begin{aligned} \widehat{E}_2(z) &= 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z) \right) \\ &= 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz+n)^2} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right) \\ &= E_2(z). \end{aligned}$$

Mais alors on peut permuter les sommes de  $\widehat{E}_2$ , *i.e.*, en notant que permuter les sommes permettait d'exprimer l'action de  $S$  :

$$\widehat{E}_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{1}{(mz + n)^2} - a_{m,n} \right) = z^{-2} E_2 \left( -\frac{1}{z} \right) - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{m,n}.$$

Calculons alors le terme d'erreur :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{m,n}(z) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N+1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{m,n}(z) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \sum_{n=-N+1}^N a_{m,n}(z) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{1}{mz - N} - \frac{1}{mz + N} \right) \text{ par télescopage,} \\ &= -\frac{2}{z} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left( \frac{1}{\frac{N}{z} - m} + \frac{1}{\frac{N}{z} + m} \right) \\ &= -\frac{2}{z} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \pi \cotan \left( \frac{\pi N}{z} \right) - \frac{z}{N} \right) \\ &= -\frac{2i\pi}{z} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{e^{2i\pi \frac{N}{z}} + 1}{e^{2i\pi \frac{N}{z}} - 1} \\ &= -\frac{2i\pi}{z}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

## ii) CLASSIFICATION DES FORMES MODULAIRES ET ELLIPTIQUES.

*Lemme 28.* Soit  $\mathfrak{C}$  un contour dans  $\mathbb{H}$ , *i.e.* l'image d'une application  $C^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un élément de  $\Gamma$  avec  $c \neq 0$ , et  $f$  une fonction méromorphe sur  $\mathbb{H}$  sans zéro ni pôle sur  $\mathfrak{C}$  et invariante par  $\gamma$ , *i.e.*  $f_k^\gamma = f$ . Alors :

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma \cdot \mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -k \int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z + \frac{d}{c}}.$$

*Preuve.* On a l'identité :  $f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$ . On la dérive par rapport à  $z$  :

$$\frac{d(\gamma \cdot z)}{dz} f'(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f'(z) + kc(cz + d)^{k-1} f(z).$$

D'où :

$$\frac{f'(\gamma \cdot z)}{f(\gamma \cdot z)} d(\gamma \cdot z) - \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k \frac{cdz}{cz + d}.$$

Il suffit alors d'intégrer le long de  $\mathfrak{C}$  pour obtenir :

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma \cdot \mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -k \int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z + \frac{d}{c}}.$$

□

**Propriété 29.** Soit  $f$  une fonction modulaire pour  $\Gamma$  de poids  $k$ , non-nulle. Si  $z$  appartient à  $\mathbb{C}$ , on note  $v_f(z)$  l'ordre de  $z$  comme zéro ou pôle de  $f$ , i.e. si  $f(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (\omega - z)^n$  est le développement en série de LAURENT de  $f$  au voisinage de  $z$ ,  $v_f(z)$  est le plus petit  $n$  tel que  $a_n \neq 0$ , ce qui est bien défini car  $f$  est méromorphe sur  $\mathbb{H}$ . On note de plus  $v_f(\infty)$  l'ordre de  $\infty$  comme zéro ou pôle de  $f$ , défini de même avec le développement en série de LAURENT de  $f$  en  $\infty$ . On a alors :

$$v_f(\infty) + \frac{1}{2}v_f(i) + \frac{1}{3}v_f(\omega) + \sum_{\substack{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H} \\ z \neq i, \omega}} v_f(z) = \frac{k}{12}.$$

*Démonstration.* Notons tout d'abord que si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$ , et  $\gamma$  à  $\Gamma$ , on a  $v_f(\gamma \cdot z) = v_f(z)$ .

La fonction  $f$  est méromorphe en  $\infty$  au sens où l'on dispose d'un développement de LAURENT en puissances de  $q(z) = e^{2i\pi z}$ . On a donc un  $\rho > 0$  tel que pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ ,  $\Im(z) \geq \rho \implies v_f(z) = 0$ . On va appliquer le théorème des résidus sur le bord du domaine fondamental coupé en ordonnées à  $\rho$ , et évitant  $\omega$ ,  $-\bar{\omega}$  et  $i$  par un cercle de rayon  $\epsilon > 0$ . Et si  $f$  a un zéro ou pôle sur le bord du domaine autre que  $\omega$ ,  $-\bar{\omega}$  ou  $i$ , il y en a donc 2 conjugués par  $\Gamma$ , les symétriques par rapport à  $i\mathbb{R}$ . Alors on en inclus un et exclu l'autre via un cercle de rayon  $\epsilon$ . Voir la figure. On tourne globalement dans le sens trigonométrique. Et bien entendu, on fera tendre  $\epsilon$  vers 0.

Le théorème des résidus assure que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H} \\ z \neq i, \omega}} v_f(z).$$

Calculons l'intégrale sur les différents contours.

- AH : Soit  $g(q) = f(z)$ . On a  $f'(z) = g'(q) \frac{dq}{dz}$ . Donc :

$$\int_{AH} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{\partial D(0, \epsilon^{-2\pi\rho})} \frac{g'(q)}{g(q)} dq = -2i\pi v_f(\infty).$$

- BC et FG : Si  $v_f(\omega) = m$ , on a  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + g(z)$  avec  $g$  localement holomorphe. On intègre sur un angle tendant vers  $\frac{\pi}{3}$  et de longueur tendant vers 0, donc :

$$\int_{FG} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\theta_0^\epsilon}^{\theta_1^\epsilon} \frac{m}{a + \epsilon e^{i\theta} - a} i\epsilon e^{i\theta} d\theta + \int_{FG} g(z) dz = im(\theta_1^\epsilon - \theta_0^\epsilon) + \int_{FG} g(z) dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{i\pi}{3} v_f(\omega).$$

En effet, la limite de l'angle sera  $\theta_1^\epsilon - \theta_0^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\pi}{3}$ . Par symétrie, on a le même résultat sur BC.

- DE : Ici l'angle tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , donc de manière analogue :

$$\int_{DE} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{i\pi}{2} v_f(i).$$

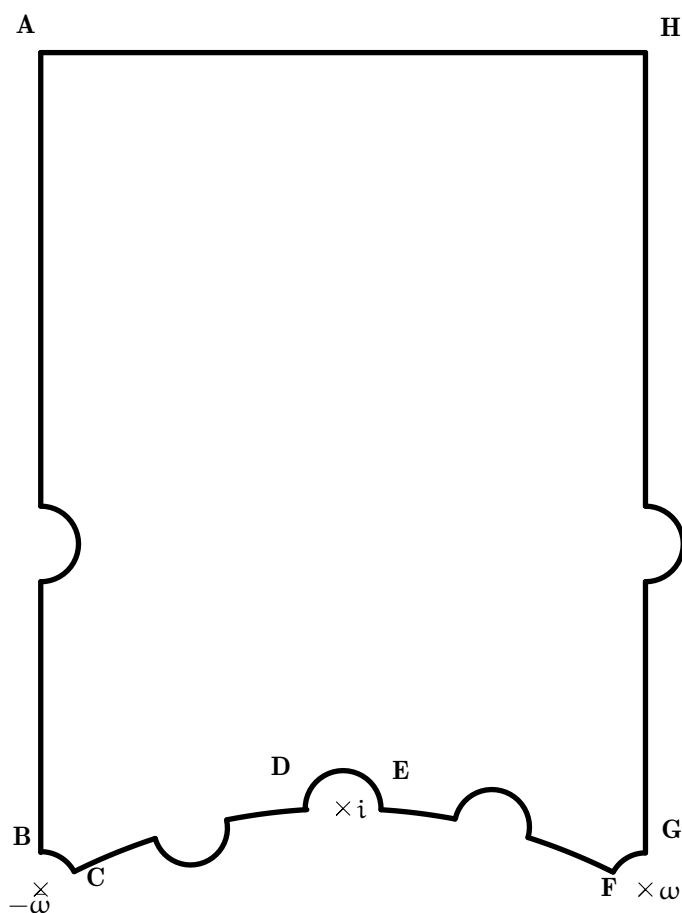
- AB et GH : Comme  $f$  est 1-périodique et que l'on intègre dans des sens différents, on a

$$\int_{AB} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{GH} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

- CD et EF : On a  $S \cdot CD = FE$ . Donc par le lemme, on obtient :

$$\int_{CD} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{EF} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -k \int_{CD} \frac{dz}{z} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{k}{12}.$$

On a bien obtenu le résultat souhaité.



□

**Définition 30.** On définit la fonction

$$\Delta : z \in \mathbb{H} \longrightarrow \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728}.$$

On a clairement  $\Delta \in M_{12}(\Gamma)$ . Mieux, étant donné le développement en  $\infty$  de  $E_k$  que l'on a déterminé précédemment, on peut même affirmer que  $\Delta \in \mathcal{E}_{12}(\Gamma)$ .

**Théorème 31.** Soit  $k \in \mathbb{Z}$  pair, alors :

- (i) Les formes modulaires de poids nul sont les constantes, i.e.  $\mathcal{M}_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ .
- (ii) Si  $k = 2$  ou  $k < 0$ ,  $\mathcal{M}_k(\Gamma) = \{0\}$ .
- (iii) Si  $k = 4, 6, 8, 10$  ou  $14$ ,  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$  est de dimension 1, i.e.  $\mathcal{M}_k(\Gamma) = \mathbb{E}_k \mathbb{C}$ .
- (iv) Si  $k < 12$  ou  $k = 14$ ,  $\mathcal{E}_k(\Gamma) = \{0\}$ .
- (v)  $\mathcal{E}_{12}(\Gamma)$  est de dimension 1, i.e.  $\mathcal{E}_{12}(\Gamma) = \Delta \mathbb{C}$ .
- (vi) Si  $k > 14$ ,  $\mathcal{E}_k(\Gamma) = \Delta \mathcal{M}_{k-12}(\Gamma)$ .
- (vii) Si  $k > 2$ ,  $\mathcal{M}_k(\Gamma) = \mathcal{E}_k(\Gamma) \oplus (\mathbb{E}_k \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $f$  est un élément de  $\mathcal{M}_0(\Gamma)$  et  $c \in \mathbb{C}$  une valeur prise par  $f$ . Soit  $g = f - c \in \mathcal{M}_0(\Gamma)$ .

Si  $g \neq 0$  on a l'identité :  $v_g(\infty) + \frac{1}{2}v_g(i) + \frac{1}{3}v_g(\omega) + \sum_{\substack{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H} \\ z \neq i, \omega}} v_g(z) = \frac{k}{12} = 0$ . Or, comme  $g$  est holomorphe, tous les termes du membre de gauche sont positifs, et on a construit  $g$  de sorte que l'un d'eux le soit strictement. Absurde, donc  $g = 0$ , i.e.  $f = c \in \mathbb{C}$ .

(ii) Si  $k < 0$  on a de même l'impossibilité de l'identité  $v_f(\infty) + \frac{1}{2}v_f(i) + \frac{1}{3}v_f(\omega) + \sum_{\substack{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H} \\ z \neq i, \omega}} v_f(z) = \frac{k}{12}$ . Et si  $k = 2$ , les  $v_f(z)$  étant à valeurs entières, le membre de gauche ne peut valoir  $\frac{1}{6}$ .

(iii) Toujours en utilisant l'identité  $v_f(\infty) + \frac{1}{2}v_f(i) + \frac{1}{3}v_f(\omega) + \sum_{\substack{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H} \\ z \neq i, \omega}} v_f(z) = \frac{k}{12}$ , on étudie les cas possibles, en nombre en fait assez limité. Établissons ces possibilités. Avec la convention que les termes non-cités sont nuls, on obtient :

- Si  $k = 4$ ,  $v_f(\omega) = 1$ .
- Si  $k = 6$ ,  $v_f(i) = 1$ .
- Si  $k = 8$ ,  $v_f(\omega) = 2$ .
- Si  $k = 10$ ,  $v_f(\omega) = v_f(i) = 1$ .
- Si  $k = 14$ ,  $v_f(\omega) = 2$  et  $v_f(i) = 1$ .

Ainsi pour chaque  $k$ , il n'y a qu'une possibilité pour les zéros. Donc si  $f_1, f_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_k(\Gamma) \setminus \{0\}$ , on a  $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{M}_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ .

(iv) Si  $f$  est un élément de  $\mathcal{E}_k(\Gamma)$ ,  $v_f(\infty) \geq 1$  donc si  $f \neq 0$ ,  $k \geq 12$  et comme les  $v_f(z)$  sont entiers,  $k \neq 14$ .

(v) Le respect de l'identité  $v_f(\infty) + \frac{1}{2}v_f(i) + \frac{1}{3}v_f(\omega) + \sum_{\substack{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H} \\ z \neq i, \omega}} v_f(z) = \frac{k}{12}$  fixe les zéros :  $v_f(\infty) = 1$ .

Donc comme dans (iii) l'espace est de dimension 1.

(vi) Si  $k > 14$  et  $f$  est un élément de  $\mathcal{E}_k(\Gamma)$ , on a  $v_f(\infty) \geq 1$  et  $v_\Delta(\infty) = 1$ . Donc on a  $\frac{f}{\Delta} \in \mathcal{M}_{k-12}(\Gamma)$ . Réciproquement  $\Delta \mathcal{M}_{k-12}(\Gamma) \subset \mathcal{E}_k(\Gamma)$ .

(vii) Notons que  $v_{\mathbb{E}_k}(\infty) = 0$ . Donc si  $f$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ , on a  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $f - c\mathbb{E}_k \in \mathcal{E}_k(\Gamma)$ . Donc  $f \in \mathcal{E}_k(\Gamma) + (\mathbb{E}_k \mathbb{C})$ . De plus, la somme est directe car si  $f$  est dans l'intersection  $\mathcal{E}_k(\Gamma) \cap (\mathbb{E}_k \mathbb{C})$ ,  $f = c\mathbb{E}_k$  pour un certain complexe  $c$ , mais en regardant en l'infini, on a  $c = 0$ .

□

### iii) FONCTIONS MODULAIRES DE POIDS NUL.

**Corollaire 32.** Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ , alors on a  $(c_{i,j}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$  tel que  $f = \sum_{4i+6j=k} c_{i,j} \mathbb{E}_4^i \mathbb{E}_6^j$ .

*Démonstration.* Si  $k$  impair ou négatif, il n'y a rien à démontrer. On raisonne par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 4, 6, 8, 10$  ou  $14$ ,  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$  est de dimension 1 et on a respectivement  $E_4, E_6, E_4^2, E_4E_6, E_4^2E_6$  dans  $\mathcal{M}_k(\Gamma) \setminus \{0\}$ . D'où l'initialisation.

Si  $k = 12$  ou  $k > 14$ ,  $p = \frac{k}{2} \geq 6$ . Par récurrence on a des entiers  $i', j'$  tels que  $4i' + 6j' = k - 4$ , alors avec  $i = i' + 1, j = j'$  on a deux entiers  $i, j$  tels que  $4i + 6j = k$ , *i.e.*  $2i + 3j = p$ . Alors  $E_4^i E_6^j \in \mathcal{M}_k(\Gamma) \setminus \{0\}$ . Mais comme  $(E_4^i E_6^j)(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1$ , on a un complexe  $c$  tel que  $f - cE_4^i E_6^j \in \mathcal{E}_k(\Gamma) = \Delta \mathcal{M}_{k-12}(\Gamma)$ . Ainsi, on a un élément  $g$  de  $\mathcal{M}_{k-12}(\Gamma)$  tel que  $f = cE_4^i E_6^j + \Delta g$ . Mais on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour  $g$ . Et  $\Delta$  n'est autre que  $\frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$ , d'où l'hérédité.  $\square$

**Définition 33** (j-invariant). On définit la fonction modulaire de poids nul suivante :

$$j = \frac{E_4^3}{\Delta} = 1728 \frac{E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}.$$

**Propriété 34.**  $j$  réalise une bijection de  $\Gamma \backslash \bar{\mathbb{H}}$  sur  $\mathbb{S}$ .

*Démonstration.*  $\Delta$  n'a qu'un zéro, en  $\infty$ , et  $E_4$  ne s'annule pas en  $\infty$ . Donc  $j$  a un pôle simple en  $\infty$  et est holomorphe sur  $\mathbb{H}$ . Donc  $j$  envoie  $\infty$  sur lui-même.

Pour tout  $c$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $E_4^3 - c\Delta$  doit s'annuler en exactement 1 point (avec éventuellement une multiplicité) de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  par la propriété 29 comme  $k = 12$ . On divise par  $\Delta$ , et  $j - c$  s'annule en un unique point de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ , *i.e.*  $j$  réalise une bijection de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  dans lui-même.  $\square$

**Propriété 35.** On a  $\mathcal{F}_0(\Gamma) = \{P(j), P \in \mathbb{C}(X)\}$ , où  $\mathbb{C}(X)$  désigne les fractions rationnelles à coefficients complexes.

*Démonstration.* On a déjà vu que si  $P$  appartenait à  $\mathbb{C}(X)$ , alors  $P(j)$  appartenait à  $\mathcal{F}_0(\Gamma)$ . En effet, on a vu que les produits et quotients de fonctions modulaires restaient des fonctions modulaires avec pour poids les sommes et différences associées, ici toujours nulles.

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}_0(\Gamma)$ . Notons  $(z_1, \dots, z_n)$  ses pôles sur  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  et  $(m_1, \dots, m_n)$  leur multiplicité. Posons  $g(z) = f(z) \prod_{i=1}^n (j(z) - j(z_i))^{m_i}$ . La fonction  $g$  est alors une fonction modulaire de poids nul sans pôle sur  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ . Reste à voir  $g \in \{P(j), P \in \mathbb{C}(X)\}$ .

On a de plus un entier  $k$  tel que  $g\Delta^k$  soit dans  $\mathcal{M}_{12k}(\Gamma)$ , en tuant le pôle en  $\infty$ . Mais alors  $g\Delta^k = \sum_{4i+6j=k} c_{i,j} E_4^i E_6^j$  d'après le corollaire 32. Il suffit alors de montrer que si  $4i + 6j = k$ ,  $\frac{E_4^i E_6^j}{\Delta^k}$  appartient à  $\{P(j), P \in \mathbb{C}(X)\}$ .

Ecrivons  $i = 3i', j = 2j'$  et  $k = i' + j'$ . Il suffit alors de montrer que  $\frac{E_4^3}{\Delta}$  et  $\frac{E_6^2}{\Delta}$  appartiennent à  $\{P(j), P \in \mathbb{C}(X)\}$ . Et en effet, on a :  $\frac{E_4^3}{\Delta} = j$  et  $\frac{E_6^2}{\Delta} = 1728 \frac{E_6^2}{E_4^3 - E_6^2} = j - 1728$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

#### iv) DÉVELOPPEMENT DE $\Delta$ EN $\infty$ .

**Définition 36** (Fonction êta de DEDEKIND<sup>7</sup>). On définit la fonction

$$\eta(z) = e^{\frac{2i\pi z}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z}).$$

Notons que l'on a clairement la convergence absolue du produit infini si  $z \in \mathbb{H}$ .

7. Richard DEDEKIND, mathématicien allemand (1831-1916).

**Propriété 37.** Notons  $\sqrt{\phantom{x}}$  la racine carrée de partie réelle positive sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*$ . On a alors :

$$\eta(S \cdot z) = \eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\eta(z).$$

*Démonstration.* Notons que l'identité est vraie pour  $z = i$ . Il suffit alors de montrer que les dérivées de chaque membre sont égales. On utilise pour cela les dérivées logarithmiques. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\eta'(z)}{\eta(z)} &= \frac{2i\pi z}{24} \left[ 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{2i\pi n z}}{1 - e^{2i\pi n z}} \right] = \frac{2i\pi z}{24} \left[ 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n} \right] = \frac{2i\pi z}{24} \left[ 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{j=1}^{+\infty} q^{nj} \right] \\ &= \frac{2i\pi z}{24} \left[ 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n)q^{nj} \right] = \frac{2i\pi z}{24} E_2(z). \end{aligned}$$

Ainsi d'une part,

$$\frac{\frac{d}{dz} \left( \eta\left(-\frac{1}{z}\right) \right)}{\eta\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^2} \frac{\eta'\left(-\frac{1}{z}\right)}{\eta\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{2i\pi z}{24} E_2\left(-\frac{1}{z}\right) z^{-2}.$$

Et d'autre part,

$$\frac{\frac{d}{dz} \left( \sqrt{\frac{z}{i}} \eta(z) \right)}{\sqrt{\frac{z}{i}} \eta(z)} = \frac{1}{2z} + \frac{\eta'(z)}{\eta(z)}.$$

Mais on a déjà montré :  $z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = E_2(z) + \frac{12}{2i\pi z}$ . D'où le résultat.  $\square$

**Propriété 38.** On a  $\Delta = \eta^{24}$ . Notamment,

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

*Démonstration.* Posons  $f(z) = \eta^{24}(z) = q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24}$ . La fonction  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}$ , 1-périodique, et nulle en  $\infty$ . De plus  $f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{12} f(z) = z^{12} f(z)$ . Ainsi,  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_{12}(\Gamma)$ , ce qui entraîne l'existence d'un complexe  $c$  tel que  $f = c\Delta$ .

Mais  $E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n)q^n$  et  $E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_5(n)q^n$ , donc le coefficient en  $q$  de  $\Delta$  est  $\frac{3 \times 240 + 2 \times 504}{1728} = 1$ . En identifiant les coefficients en  $q$  de notre identité, on assure  $c = 1$ .  $\square$

### III. Formes modulaires sur des sous-groupes de congruence de $\Gamma$ .

#### i) PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

**Propriété 39.** Si  $p$  un nombre premier, alors  $\Gamma \cdot \infty$  compte deux classes de  $\Gamma_0(p)$ -équivalence, dont  $\infty$  et  $0$  sont des représentants.

En conséquence, si  $N$  est un entier, comme il contient  $\Gamma_0(p)$  pour un certains nombre premier  $p$ , les pointes comptent au plus 2 classes de  $\Gamma_0(N)$ -équivalence, et vérifier qu'une fonction est méromorphe (respectivement holomorphe, elliptique) en  $\infty$  et  $0$  suffit pour toutes les pointes.



*Démonstration.* Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  appartient à  $\Gamma_0(\mathfrak{p})$ , on a d'un côté que  $c \equiv 0[\mathfrak{p}]$  et de l'autre que  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux car  $\det(\gamma) = 1$ . Ainsi  $\gamma \cdot \infty = \frac{a}{c}$  est une fraction irréductible de dénominateur divisible par  $\mathfrak{p}$ . Réciproquement, si  $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$  est une fraction irréductible et  $c \equiv 0[\mathfrak{p}]$ , on peut choisir des entiers  $b$  et  $d$  convenant par le théorème de BÉZOUT.

Donc  $\Gamma_0(\mathfrak{p}) \cdot \infty = \left\{ \frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \text{ fraction irréductible telle que } c \equiv 0[\mathfrak{p}] \right\} \cup \{\infty\}$ . Notons que  $0$  n'est pas dans cet ensemble.

D'autre part, si  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$  est une fraction irréductible et  $\beta \not\equiv 0[\mathfrak{p}]$ . On a par le théorème de BÉZOUT des entiers  $u, v$  tels que  $\beta v - \alpha u = 1$ . Mais comme  $\mathfrak{p}$  est premier, il est premier avec  $\beta$ . Ainsi, par le théorème de BÉZOUT, on a des entiers  $k, \lambda$  tels que  $u + k\beta = \lambda\mathfrak{p}$ . Posons alors  $a = v + k\alpha$ ,  $b = \alpha$ ,  $c = u + k\beta$ ,  $d = \beta$ . On a alors bien que  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice de  $\Gamma_0(\mathfrak{p})$  et  $\gamma \cdot 0 = \frac{\alpha}{\beta}$ . Donc tous les rationnels qui ne sont pas dans la classe de  $\infty$  sont dans celle de  $0$ .  $\square$

**Définition 40.** Soit  $f$  fonction modulaire de poids  $k$ . On a un entier  $N$  pour lequel on peut écrire :  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q_N^n$  et  $z^{-k} f(z) = f_k^{|S}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n q_N^n$ . On définit alors  $f(\infty) = a_0$  et  $f(0) = b_0$ .

Notons que la définition est indépendante de  $N$ .

**Propriété 41.** Soit  $\Gamma'$  un sous-groupe de congruence de  $\Gamma$  et  $\alpha$  une matrice de  $GL_2^+(\mathbb{Q})$ . Posons  $\Gamma'' = \alpha^{-1}\Gamma'\alpha \cap \Gamma$ . Alors  $\Gamma''$  est un sous-groupe de congruence de  $\Gamma$  et l'application  $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma') \rightarrow f_k^{|\alpha} \in \mathcal{M}_k(\Gamma'')$  est bien définie et réalise une bijection, de même qu'elle induit une bijection de  $\mathcal{E}_k(\Gamma')$  sur  $\mathcal{E}_k(\Gamma'')$ .

En particulier, si  $N$  est un entier et  $f$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ , en posant  $g : z \rightarrow f(Nz)$ , on a que  $g$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ , avec de plus les identités :  $g(\infty) = f(\infty)$  et  $g(0) = N^{-k}f(0)$ .

*Lemme 42.* Soit  $\alpha$  une matrice de  $GL_2^+(\mathbb{Q})$  à coefficients entiers, dont on notera  $\delta$  le déterminant. Soit  $N$  un entier tel que  $\Gamma(N) \subset \Gamma'$ , alors  $\Gamma(N\delta) \subset \alpha^{-1}\Gamma'\alpha$ .

*Preuve.* Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma(N\delta)$ , i.e.  $\gamma \equiv \text{id}[N\delta]$  et  $\det(\gamma) = 1$ . On a ainsi une matrice  $\epsilon$  à coefficients entiers telle que  $\gamma = \text{id} + N\delta\epsilon$ . Alors  $\alpha\gamma\alpha^{-1} = \text{id} + N\delta\alpha\epsilon\alpha^{-1}$ . Mais  $\beta = \delta\alpha^{-1}$  est à coefficients entiers car égale à la transposée de la comatrice de  $\alpha$ , qui est à coefficients entiers. De plus,  $\det(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = \det(\gamma) = 1$ . D'où  $\alpha\gamma\alpha^{-1} = \text{id} + N\alpha\epsilon\beta \in \Gamma(N) \subset \Gamma'$ .  $\square$

*Lemme 43.* Soit  $f$  une fonction modulaire. On a donc un entier  $N$  tel que pour tout  $\gamma_0$  dans  $\Gamma$  un développement du type  $f_k^{|\gamma_0}(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n q_N^n$  pour un certain entier  $n_0$  et des complexes  $a_n$  dépendant de  $\gamma_0$ . Alors cette propriété s'étend : Pour tout  $\alpha$  dans  $GL_2^+(\mathbb{Q})$ , on a des complexes  $b_n$  tels que  $f_k^{|\alpha}(z) = \sum_{n=n_\alpha}^{+\infty} b_n q_{\delta_\alpha n_\alpha}^n$  pour certains entiers strictement positifs  $\delta_\alpha, n_\alpha$  dépendant de  $\alpha$ , et plus précisément  $\delta_\alpha = \det(\alpha)$ .

*Preuve.* Soit  $\alpha$  appartenant à  $GL_2^+(\mathbb{Q})$ . Quitte à le multiplier par un entier, ce qui ne change pas  $f_k^{|\alpha}$ , on peut supposer que  $\alpha$  est à coefficients entiers. On peut alors réaliser une réduction : on a une matrice  $\gamma_0$  de  $\Gamma$ , telle que  $\gamma_0^{-1}\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  pour certains  $a, d$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $b$  dans  $\mathbb{Z}$ . Notons  $\delta_\alpha = \det(\alpha) = ad$ . On a alors :

$$f_k^{|\alpha}(z) = \left( f_k^{|\gamma_0} \right)_k^{|\gamma_0^{-1}\alpha}(z) = (ad)^{\frac{k}{2}} d^{-k} f_k^{|\gamma_0} \left( \frac{az+b}{d} \right) = \left( \frac{a}{d} \right)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n e^{\frac{2in\pi}{N} \frac{az+b}{d}} = \left( \frac{a}{d} \right)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n e^{\frac{2in\pi b}{Nd}} q_{N\delta_\alpha}^{a^2 n}.$$

D'où le résultat en posant  $n_\alpha = an_0$ , et  $(b_n)_{n \geq n_\alpha}$  naturellement.  $\square$

*Démonstration de la propriété 41.* Le premier lemme permet d'assurer que  $\Gamma''$  est un sous-groupe de congruence de  $\Gamma$ .

Ensuite, si  $f$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma')$  et  $\gamma'$  à  $\Gamma'$ , on a  $\left(f_k^{|\alpha|}\right)_k^{|\alpha^{-1}\gamma'\alpha|} = \left(f_k^{|\gamma'|}\right)_k^{|\alpha|} = f_k^{|\alpha|}$ , d'où l'invariance. Le second lemme assure les hypothèses de régularité, puisque si  $\gamma$  appartient à  $\Gamma$ ,  $\alpha\gamma$  appartient à  $GL_2^+(\mathbb{Q})$ , de déterminant  $\delta = \det(\alpha)$ , ce qui assure un développement de LAURENT de  $f_k^{\alpha\gamma}$  en puissances de  $q_{\mathbb{N}\delta}$ , de plus petit terme non-nul  $n_{\alpha\gamma}n_0$ . Et comme  $f$  est une forme modulaire,  $n_0$  est positif, donc  $n_{\alpha\gamma}n_0$  aussi. De même si  $f$  est une forme elliptique,  $n_0 > 0$  entraîne que  $n_{\alpha\gamma}n_0$  aussi. Donc l'application définie dans la propriété 41 est bien définie, de même que sa restriction de  $\mathcal{E}_k(\Gamma')$  sur  $\mathcal{E}_k(\Gamma'')$ . De plus, c'est une bijection, d'inverse  $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma') \rightarrow f_k^{|\alpha|^{-1}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma'')$ . De même pour sa restriction de  $\mathcal{E}_k(\Gamma')$  sur  $\mathcal{E}_k(\Gamma'')$ .

Enfin, concernant le cas particulier, posons  $\alpha = \begin{pmatrix} \mathbb{N} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $g = N^{-\frac{k}{2}} f_k^{|\alpha|}$ . De plus,  $\alpha\Gamma\alpha^{-1} \cap \Gamma = \Gamma_0(N)$ . On peut alors appliquer la propriété, ce qui assure que  $g$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ . En développant  $f$  en  $\infty$ , on a directement  $f(\infty) = g(\infty)$ . D'autre part,  $\alpha S = S\beta$  où  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ . Donc  $g_k^{|S|} = N^{-\frac{k}{2}} \left(f_k^{|S|}\right)_k^{|\beta|}$ . Le développement obtenu dans la démonstration du lemme 43 en changeant  $f$  par  $f_k^{|S|}$ ,  $\alpha$  par  $\beta$  et pris en  $n = 0$  donne alors  $g(0) = N^{-k}f(0)$ .  $\square$

## ii) QUELQUES CAS PARTICULIERS.

**Propriété 44.** Soit  $\Gamma'$  un sous-groupe de congruence de  $\Gamma$ , alors  $\mathcal{M}_0(\Gamma')$  est réduit à  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction modulaire du  $\Gamma'$  de poids nul. Soit  $z_0$  appartenant à  $\mathbb{H}$  et  $\mathbf{a} = f(z_0)$ . On a  $(\alpha_j)$  des éléments de  $\Gamma$  de sorte que l'on ait l'union disjointe  $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^p \alpha_j \Gamma'$ . On choisit de plus  $\alpha_1 = \text{id}$ . Définissons l'application  $g = \prod_{j=1}^p \left(f_0^{|\alpha_j|^{-1}} - \mathbf{a}\right)$ , i.e. pour  $z$  dans  $\mathbb{H}$ ,  $g(z) = \prod_{j=1}^p \left(f(\alpha_j^{-1}z) - \mathbf{a}\right)$ . La fonction  $g$  est bien holomorphe sur  $\mathbb{H}$  ainsi qu'en les pointes, car  $f$  l'est. En effet, on a simplement pour toute matrice  $\gamma$  de  $\Gamma$  :  $g_0^{|\gamma|} = \prod_{j=1}^p \left(f_0^{|\gamma\alpha_j|^{-1}} - \mathbf{a}\right)$ .

Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma$ , l'action par translation de  $\gamma$  sur  $\{\alpha_j \Gamma', 1 \leq j \leq p\}$  consiste à permuter les éléments. En effet, pour tout entier  $j$ , on a bien  $k$  tel que  $\gamma\alpha_j \Gamma' = \alpha_k \Gamma'$ . Et si on a  $j$  et  $j'$  tel que  $\gamma\alpha_j \Gamma' = \gamma\alpha_{j'} \Gamma' = \alpha_k \Gamma'$ , on a  $\gamma'$  dans  $\Gamma'$  de sorte que  $\alpha_j = \alpha_{j'}\gamma' \in \alpha_{j'} \Gamma'$ , ce qui contredit l'union disjointe.

Ainsi, si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma$ , on a

$$g_0^{|\gamma|} = \prod_{j=1}^p \left(f_0^{|\gamma\alpha_j|^{-1}} - \mathbf{a}\right) = \prod_{j=1}^p \left(f_0^{|\alpha_j|^{-1}} - \mathbf{a}\right) = g$$

quitte à réindexer la somme. En effet, avec les notations précédentes, pour tout entier  $j$  on a un entier  $k$  et  $\gamma'$  dans  $\Gamma'$  tel que  $\gamma\alpha_j = \alpha_k\gamma'$ , i.e.  $(\gamma\alpha_j)^{-1} = \gamma'^{-1}\alpha_k^{-1}$ . Mais  $f$  est  $\Gamma'$ -invariante, donc  $f_0^{|\gamma\alpha_j|^{-1}} = f_0^{|\alpha_k|^{-1}}$ .

Ainsi  $g$  appartient à  $\mathcal{M}_0(\Gamma)$  qui ne contient que les fonctions constantes. Or,  $g(z_0) = \prod_{j=1}^p \left(f(\alpha_j^{-1}z_0) - \mathbf{a}\right)$  est nul car  $\alpha_1 = \text{id}$  et  $f(z_0) = \mathbf{a}$ . En conséquence,  $g$  est la fonction nulle. Mais  $g$  est un produit de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{H}$ , ce qui entraîne que l'un des facteurs est la fonction nulle. Ainsi, on a un entier  $j$  tel que  $f_0^{|\alpha_j|^{-1}} = \mathbf{a}$ . En appliquant  $\alpha_j$ , on a alors  $f = \mathbf{a}$ . D'où  $f$  constante.  $\square$

**Propriété 45.** Soient  $k$  et  $N$  des entiers supérieurs ou égaux à 2 vérifiant l'identité  $k(N+1) = 24$ . Soit  $\eta : z \rightarrow e^{\frac{2i\pi z}{24}} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - q^n)$  la fonction de DEDEKIND. On définit l'application  $g : z \rightarrow (\eta(z)\eta(Nz))^k$ . Alors si  $g$  appartient à  $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N))$ , on a l'identité  $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N)) = \mathbb{C}g$ . Et si  $g$  n'appartient pas à cet ensemble, on a que  $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N))$  est réduit à  $\{0\}$ .

*Démonstration.* Notons d'abord que  $g^{N+1}(z) = (\eta(z)\eta(Nz))^{24} = \Delta(z)\Delta(Nz)$  Par la propriété 41, on a alors que l'application  $g$  appartient à  $\mathcal{E}_{24}(\Gamma_0(N))$ , et elle est non-nulle.

L'application  $\Delta$  n'a pas de zéro sur  $\mathbb{H}$  donc  $g^{N+1}$  non plus. En  $\infty$ , on a

$$g^{N+1}(z) = q^{N+1} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - q^n)^{24} (1 - q^{Nn})^{24}.$$

Donc  $\infty$  est un zéro d'ordre  $N + 1$  de  $g^{N+1}$ . En 0,

$$(g^{N+1})_{24}^{|S}(z) = z^{-24} \Delta\left(-\frac{1}{z}\right) \Delta\left(-\frac{N}{z}\right) = N^{-12} \Delta(z) \Delta\left(\frac{z}{N}\right) = n^{-12} q^{N+1} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - q^n)^{24} (1 - q^{Nn})^{24}.$$

Donc 0 est un zéro d'ordre  $N + 1$  de  $g^{N+1}$ .

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N))$ .  $f$  a un zéro en  $\infty$  et 0. Donc  $\left(\frac{f}{g}\right)^{N+1}$  n'a pas de pôle, ni sur  $\mathbb{H}$  ni sur les pointes, et donc appartient à  $\mathcal{M}_0(\Gamma_0(N))$ , i.e.  $\left(\frac{f}{g}\right)^{N+1}$  est constante. Comme  $\frac{f}{g}$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{H}$ , on a de même que  $\frac{f}{g}$  est constante. □

**Définition 46.** Soit  $N$  un entier strictement positif. Soit  $(\alpha, \beta)$  appartenant à  $\mathbb{Z}^2$  tel que  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas simultanément congrus à 0 modulo  $N$ . Soit  $k \geq 3$  un entier, on définit la série d'EISEINTEIN correspondante :

$$E_k^{(\alpha, \beta)[N]}(z) = \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) \equiv (\alpha, \beta)[N]}} \frac{1}{(mz + n)^k}.$$

Soit  $p$  un nombre premier différent de 2. On définit la fonction :

$$F_p(z) = \prod_{\beta=1}^{\frac{p-1}{2}} E_3^{(0, \beta)[p]}(z).$$

**Définition 47.** Soit  $p$  un nombre premier et  $d$  un entier premier avec  $p$ . On définit le symbole de LEGENDRE<sup>8</sup> :

$$\left(\frac{d}{p}\right)_{\mathfrak{L}} = \begin{cases} +1 & \text{si } d \text{ est un carré modulo } p \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Propriété 48.** Soit  $p$  un nombre premier différent de 2. Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\Gamma_0(p)$ , alors

$$(F_p)_{3 \frac{p-1}{2}}^{|Y} = \left(\frac{d}{p}\right)_{\mathfrak{L}} F_p.$$

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  une matrice de  $\Gamma_0(p)$ . Si  $(m, n)$  appartient à  $\mathbb{Z}^2$ , on pose

$$(m, n)\gamma = (ma + nc, mb + nd).$$

Montrons tout d'abord que l'on a pour tous entiers  $N$ ,  $k \geq 3$  et couple d'entiers  $(\alpha, \beta)$ , si  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_0(N)$  :

$$\left(E_k^{(\alpha, \beta)[N]}\right)_k^{|Y} = E_k^{(\alpha, \beta)\gamma[N]}.$$

---

8. Adrien-Marie LEGENDRE, mathématicien français, polytechnicien (1752-1833).

En effet,

$$\begin{aligned} \left( E_k^{(\alpha, \beta)[N]} \right)_k^{| \gamma} (z) &= (cz + d)^{-k} \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) \equiv (\alpha, \beta)[N]}} \frac{1}{\left( m \frac{az+b}{cz+d} + n \right)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m, n) \equiv (\alpha, \beta)[N]}} \frac{1}{\left( (ma + nc)z + (mb + nd) \right)^k}. \end{aligned}$$

Or, si  $(m, n)$  appartient à  $\mathbb{Z}^2$ ,  $(m, n) \equiv (\alpha, \beta)[N]$  équivaut à  $(m, n)\gamma \equiv (\alpha, \beta)\gamma[N]$ . D'où le résultat en changeant de variable de sommation, ce qui est justifier car la série converge absolument.

Notamment, on a montré qu'avec les notations de la propriété,

$$\left( E_3^{(0, \beta)[p]} \right)_3^{| \gamma} = E_3^{(0, \beta)\gamma[p]}.$$

Mais  $(0, \beta) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv (0, d\beta)[p]$  car  $c \equiv 0[p]$ . Ainsi, on a montré :

$$(F_p)_3^{| \gamma}_{\frac{p-1}{2}} = \prod_{\beta=1}^{\frac{p-1}{2}} E_3^{(0, d\beta)[p]}(z).$$

D'autre part, en appliquant notre premier résultat à  $\gamma = -\text{id}$ , on obtient :

$$E_3^{(-\alpha, -\beta)[p]} = -E_3^{(\alpha, \beta)\gamma[p]}.$$

Notons que  $d$  est premier avec  $p$  et est donc inversible dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Reste à comprendre qui sont les  $d\beta$  modulo  $p$  pour  $\beta$  entre 1 et  $\frac{p-1}{2}$ . De plus, si  $\beta$  et  $\hat{\beta}$  sont deux entiers entre 1 et  $\frac{p-1}{2}$  tels que  $d\beta \equiv \pm d\hat{\beta}[p]$ , alors  $\beta \equiv \pm \hat{\beta}[p]$ , entraînant  $\beta = \hat{\beta}$ . Autrement dit, les  $d\beta$  modulo  $p$  pour  $\beta$  entre 1 et  $\frac{p-1}{2}$  vont donner les  $\frac{p-1}{2}$  paires  $\{(-1, 1), \dots, (-\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2})\} \subset \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$ . On va donc reconstituer le produit initial, en ajouter un facteur  $(-1)^{n_d}$  où  $n_d$  est le cardinal de  $\{\beta \in \llbracket 1, \frac{p-1}{2} \rrbracket \text{ tel que } \exists k \in \llbracket 1, \frac{p-1}{2} \rrbracket, d\beta = -k[p]\}$ . Or, on a  $(-1)^{n_d} = \left(\frac{d}{p}\right)_\mathcal{E}$ . Ce résultat d'arithmétique sera admis.

Ainsi, on a bien montré  $(F_p)_3^{| \gamma}_{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{d}{p}\right)_\mathcal{E} F_p$ . □

**Propriété 49.** Soit  $p$  un nombre premier impair, posons pour  $z$  dans  $\mathbb{H}$ ,  $\psi_p = \frac{\eta^p(z)}{\eta(pz)}$  où  $\eta$  est la fonction êta de DEDEKIND. Alors  $\psi_p$  et  $F_p$  sont colinéaires.

En particulier, ils ont la même formule de transformation.

*Démonstration.* Posons

$$h(z) = \prod_{\beta=1}^{p-1} E_3^{(0, \beta)[p]}(z).$$

Comme nous l'avons déjà noté dans la démonstration précédente, on a pour tout entiers  $\alpha, \beta$   $E_3^{(-\alpha, -\beta)[p]} = -E_3^{(\alpha, \beta)\gamma[p]}$ . Ainsi,

$$h = (-1)^{\frac{p-1}{2}} F_p^2.$$

Donc  $h$  appartient à  $\mathcal{M}_{3(p-1)}(\Gamma_0(p))$  d'après la propriété 48. On admet que  $h$  a un zéro d'ordre  $\frac{p^2-1}{4}$  en 0.

D'autre part, considérons l'application  $g(z) = \psi_p^8(z) = \frac{\Delta(z)^p}{\Delta(z)}$ . Donc  $g$  appartient à  $\mathcal{M}_{12(p-1)}(\Gamma_0(p))$  d'après la propositions 41. De plus, la fonction  $g$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{H}$ . En  $\infty$ , la fonction  $g$  tend vers 1 et en 0, elle s'annule avec un zéro d'ordre  $p^2 - 1$ . On peut donc considérer  $\frac{h^4}{g}$  qui appartient à  $\mathcal{M}_0(\Gamma_0(p))$  qui est réduit à  $\mathbb{C}$  d'après la propriété 44.

Donc  $\psi_p^8$  est colinéaire à  $h^4$  et donc  $F_p^8$ . D'où  $\psi_p$  et  $F_p$  sont colinéaires.  $\square$

### iii) CARACTÈRES DE DIRICHLET.

Soit  $\Gamma', \Gamma''$  deux sous-groupes de congruence de  $\Gamma$  tels que  $\Gamma'' \triangleleft \Gamma'$ . Pour tout  $\gamma'$  appartenant à  $\Gamma'$ , on dispose de l'isomorphisme linéaire  $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma'') \rightarrow f_k^{|\gamma'^{-1}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma'')$ . De plus, celui-ci ne dépend que de la classe de  $\Gamma''$ -équivalence de  $\gamma'$ . En effet, cette application a pour inverse  $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma'') \rightarrow f_k^{|\gamma'}$ . Si  $\gamma''$  appartient à  $\Gamma''$ ,  $(f_k^{|\gamma'^{-1}})_k^{|\gamma''} = (f_k^{|\gamma''})_k^{|\gamma''^{-1}\gamma'^{-1}\gamma''} = f_k^{|\gamma'^{-1}}$  car  $f$  est  $\Gamma''$  invariante et que  $\Gamma''$  est distingué dans  $\Gamma'$ . Enfin,  $f_k^{|(\gamma'\gamma'')^{-1}} = (f_k^{|\gamma''^{-1}})_k^{|\gamma'^{-1}} = f_k^{|\gamma'^{-1}}$ .

On dispose donc d'une représentation du groupe  $\Gamma'/\Gamma''$ , l'application

$$\gamma \in \Gamma'/\Gamma'' \rightarrow (f \in \mathcal{M}_k \rightarrow f_k^{|\gamma^{-1}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma'')) \in \text{Aut}(\mathcal{M}_k(\Gamma'')).$$

Si  $\chi : \Gamma'/\Gamma'' \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un caractère, on peut définir

$$\mathcal{M}_k(\Gamma', \chi) = \left\{ f \in \mathcal{M}_k(\Gamma'') \text{ tel que } \forall \gamma \in \Gamma', f_k^{|\gamma^{-1}} = \chi(\gamma)f \right\}.$$

Si  $\Gamma'/\Gamma''$  est abélien, alors  $\mathcal{M}_k(\Gamma'')$  se décomposera en somme directe des  $\mathcal{M}_k(\Gamma', \chi)$ .

Considérons  $\Gamma' = \Gamma_0(N)$  et  $\Gamma'' = \Gamma_1(N)$ . Considérons le morphisme de groupes

$$\psi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \rightarrow d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*.$$

Rappelons pour cela que si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  appartient à  $\Gamma_0(N)$ , alors  $c \equiv 0[N]$  et le déterminant de la matrice est égal à 1, ce qui impose que  $d$  est premier avec  $N$ . Ainsi l'application  $\psi$  est bien un morphisme de groupes et le théorème de BÉZOUT assure sa surjectivité. De plus, son noyau est exactement  $\Gamma_1(N)$ . On a donc justifié que  $\Gamma'' = \Gamma_1(N)$  était un sous-groupe distingué de  $\Gamma' = \Gamma_0(N)$  et que  $\Gamma'/\Gamma''$  était isomorphe à  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$  et était abélien.

**Définition 50.** On définit un caractère de DIRICHLET<sup>9</sup> modulo  $N$  comme un caractère de  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$  dans  $\mathbb{C}$ . On peut aussi le voir comme une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$   $N$ -périodique, multiplicative et nulle pour tout entier  $n$  n'étant pas premier avec  $N$ . On notera  $X(N)$  l'ensemble des caractères de DIRICHLET modulo  $N$ .

Un tel caractère est dit primitif si, en le voyant comme une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$ , il n'est pas un caractère de DIRICHLET pour un entier strictement plus petit de  $N$ .

Si  $\chi$  est un caractère de DIRICHLET modulo  $N$ , on notera

$$\mathcal{M}_k(N, \chi) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi) = \left\{ f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \text{ tel que } \forall \gamma \in \Gamma_0(N), f_k^{|\gamma^{-1}} = \chi(\gamma)f \right\}.$$

On notera  $\mathbb{1}$  le caractère trivial. Notamment,  $\mathcal{M}_k(N, \mathbb{1}) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ .

9. Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET, mathématicien allemand (1805-1859).

*Remarque.* Pour vérifier qu'une fonction appartient à un certains  $\mathcal{M}_k(\mathbf{N}, \chi)$ , il suffit de vérifier la propriété définissant cet ensemble sur un système de générateurs de  $\Gamma_0(\mathbf{N})$ . En effet, comme  $\chi$  est multiplicative et que l'on peut composer les translations de  $f$ , la propriété s'étend.

**Propriété 51.** *On a la décomposition en somme directe  $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(\mathbf{N})) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}(\mathbf{N})} \mathcal{M}_k(\mathbf{N}, \chi)$ . De plus, pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(\mathbf{N}))$  et tout caractère de DIRICHLET modulo  $\mathbf{N}$   $\chi$ , la composante de  $f$  dans  $\mathcal{M}_k(\mathbf{N}, \chi)$  est*

$$f_\chi = \frac{1}{\varphi(\mathbf{N})} \sum_{\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*} \overline{\chi(\mathbf{d})} f_k^{|\gamma_{\mathbf{d}}|}$$

où  $\varphi$  est la fonction d'EULER<sup>10</sup> et  $\gamma_{\mathbf{d}}$  est n'importe quel antécédent de  $\mathbf{d}$  par  $\psi$  défini précédemment. Notons que comme  $f$  est  $\Gamma_1(\mathbf{N})$ -invariante, le choix de l'antécédent est sans importance puisque si  $\gamma_{\mathbf{d}}$  en est un, l'ensemble des antécédents est alors  $\Gamma_1(\mathbf{N})\gamma_{\mathbf{d}}$ .

*Démonstration.* Soit  $\chi$  un caractère de DIRICHLET modulo  $\mathbf{N}$ . Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$  une matrice de  $\Gamma_0(\mathbf{N})$ . Comme  $\psi$  est multiplicative, pour tout  $s \in (\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*$ ,  $\gamma_s \gamma = \gamma_{s\mathbf{d}}$ . Ainsi l'action de  $\gamma$  sur  $f_\chi$  permute les termes de la somme et  $(f_\chi)_k^{|\gamma|} = \chi(\mathbf{d}) f_\chi$  en utilisant que  $\overline{\chi(s)} = \overline{\chi(s\mathbf{d})} \chi(\mathbf{d})$  pour tout  $s$  dans  $(\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*$ . Mais via l'isomorphisme induit par  $\psi$  de  $\Gamma'/\Gamma''$  sur  $(\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*$ ,  $\chi(\mathbf{d}) = \chi(\gamma)$ . Notons que l'on a utilisé l'abus de notations consistant à considérer  $\chi$  à valeur soit sur  $(\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*$  soit  $\Gamma'/\Gamma''$  via l'isomorphisme.

D'autre part, si  $\mathbf{d}$  appartient à  $(\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*$ , on a

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}(\mathbf{N})} \overline{\chi(\mathbf{d})} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{d} = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{\chi \in \mathcal{X}(\mathbf{N})} f_\chi = \frac{1}{\varphi(\mathbf{N})} \sum_{\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}/\mathbf{N}\mathbb{Z})^*} f_k^{|\gamma_{\mathbf{d}}|} \sum_{\chi \in \mathcal{X}(\mathbf{N})} \overline{\chi(\mathbf{d})} = f.$$

D'où la décomposition. De plus, la somme est bien directe.  $\square$

**Propriété 52.** *L'ensemble  $\mathcal{X}(4)$  est de cardinal deux. Il s'écrit alors  $\mathcal{X}(4) = \{\mathbb{1}, \chi\}$  où  $\mathbb{1}$  est le caractère trivial. On a en conséquence si  $k$  est un entier :*

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1(4)) = \begin{cases} \mathcal{M}_k(4, \mathbb{1}) & \text{si } k \text{ est pair} \\ \mathcal{M}_k(4, \chi) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Tout d'abord,  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$  est réduit à  $\{-1, 1\}$ . Ainsi un caractère  $\chi$  de  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$  dans  $\mathbb{C}$  est entièrement déterminé par l'image de  $-1$ , dont le carré doit être  $\chi(-1)^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1$ . Ainsi, il y a deux possibilités, soit  $\chi(-1) = 1$ , c'est alors le caractère trivial, soit  $\chi(-1) = -1$ , c'est un second caractère.

Ensuite,  $-\text{id}$  appartient à  $\Gamma_0(4)$ . De plus, si  $k$  est un entier et  $f$  un élément de  $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(4))$ , on a  $f_k^{|\text{id}|} = (-1)^k f$ . D'autre part, via l'isomorphisme que l'on a construit entre  $\Gamma_0(4)/\Gamma_1(4)$  et  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ ,  $-\text{id}$  s'identifie à  $-1$ . Notons alors que l'on a avec les notations de la propriété  $\mathbb{1}(-\text{id}) = 1$  et  $\chi(-\text{id}) = -1$ . Ainsi, selon la parité de  $k$ ,  $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(4))$  est disjoint soit de  $\mathcal{M}_k(4, \mathbb{1})$ , soit de  $\mathcal{M}_k(4, \chi)$ . Or, la propriété 51 assure  $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(4)) = \mathcal{M}_k(4, \mathbb{1}) \oplus \mathcal{M}_k(4, \chi)$ . On a alors l'égalité souhaitée.  $\square$

10. Leonhard EULER, mathématicien et physicien suisse (1707-1783).

**Propriété 53.** Soient  $N_0$  et  $N_1$  des entiers positifs. Soient  $\chi_0$  un caractère de DIRICHLET modulo  $N_0$  et  $\chi_1$  un caractère de DIRICHLET primitif modulo  $N_1$ . Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{M}_k(N_0, \chi_0)$  que l'on décompose sous la forme  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$ . Posons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi_1(n) q^n.$$

Alors  $g$  appartient à  $\mathcal{M}_k(N_0 N_1^2, \chi_0 \chi_1^2)$ . De plus, si  $f$  est une forme elliptique, alors  $g$  en est aussi une.

En particulier, si  $f$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0))$  et  $\chi$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , alors  $g$  appartient à  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 N_1^2))$ .

*Démonstration.* Soit  $\xi = e^{\frac{2i\pi}{N_1}}$ . Le caractère  $\chi_1$ , vu comme une application de  $\mathbb{N}$  de  $\mathbb{N}$ , est  $N_1$ -périodique. On peut donc réaliser sa transformée de FOURIER<sup>11</sup>. Ainsi, si  $n$  est un entier,

$$\chi_1(n) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \left( \sum_{l=0}^{N_1-1} \chi_1(l) \xi^{lk} \right) \xi^{-kn}.$$

On injecte cette expression dans celle de l'application  $g$ , il vient :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \left( \sum_{l=0}^{N_1-1} \chi_1(l) \xi^{lk} \right) \xi^{-kn} a_n q^n = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} \chi_1(l) \sum_{n=0}^{+\infty} \xi^{k(l-n)} a_n q^n.$$

En exploitant la multiplicativité du caractère  $\chi_1$  et en posant  $\sigma = \sum_{j=0}^{N_1-1} \chi_1(j) \xi^j$ , on a encore :

$$g(z) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} \overline{\chi_1(k)} \chi_1(kl) \xi^{kl} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n(z - \frac{k}{N_1})} = \frac{g}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \overline{\chi_1(k)} f\left(z - \frac{k}{N_1}\right).$$

Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\Gamma_0(N_0 N_1^2)$ . Posons pour tout entier  $k$  :

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{N_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $0 \leq k, \kappa \leq N_1$  sont deux entiers, on calcule :

$$\gamma_k \gamma \gamma_\kappa^{-1} = \begin{pmatrix} a - c \frac{k}{N_1} & b + \frac{a\kappa - dk}{N_1} - \frac{k\kappa}{N_1^2} \\ c & d + c \frac{\kappa}{N_1} \end{pmatrix}.$$

Si  $k$  est fixé, on choisit  $\kappa$  de sorte que  $a\kappa \equiv dk[N_1]$ . Notons que cela est toujours possible car  $ab - bc = 1$  et  $N_1$  divise  $c$ , ce qui assure que  $a$  est premier avec  $N_1$  par le théorème de BÉZOUT. D'autre part, on a également que  $N_1^2$  et  $N_0$  divisent  $c$ . Donc  $\gamma_k \gamma \gamma_\kappa^{-1}$  est une matrice à coefficients entiers, qui appartient alors à  $\Gamma_0(N_0)$ .

11. Joseph FOURIER, mathématicien et physicien français, normalien (1768-1830).

Ainsi, en notant que pour tout entier  $k$ ,  $\gamma_k \cdot z = z - \frac{k}{N_1}$ , on peut calculer :

$$\begin{aligned} g(\gamma \cdot z) &= \frac{g}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \overline{\chi_1(k)} f(\gamma_k \gamma \gamma_k^{-1} \gamma \cdot z) \\ &= \frac{g}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \overline{\chi_1(k)} \chi_0 \left( d + c \frac{k}{N_1} \right) \left( c \gamma_k \cdot z + d + c \frac{k}{N_1} \right)^k f(\gamma_k \cdot z) \\ &= \chi_0(d) (cz + d)^k \frac{g}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \overline{\chi_1(k)} f \left( z - \frac{k}{N_1} \right) \text{ car } N_0 \text{ divise } c \frac{k}{N_1}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\kappa$  dépend de  $k$  dans cette formule. On a les congruences  $\kappa \equiv kda^{-1}[N_1]$  et  $ad \equiv 1[N_1]$ , donc

$$\overline{\chi_1(k)} = \overline{\chi_1(k)} \frac{\overline{\chi_1(a)}}{\chi_1(d)} = \chi_1(d)^2 \overline{\chi_1(k)}.$$

On obtient alors en sommant sur  $\kappa$  et non plus sur  $k$  :

$$g(\gamma \cdot z) = (\chi_0 \chi^2)(d) (cz + d)^k \frac{g}{N_1} \sum_{\kappa=0}^{N_1-1} \overline{\chi_1(\kappa)} \chi_0 \left( d + c \frac{\kappa}{N_1} \right) f \left( z - \frac{\kappa}{N_1} \right) = (\chi_0 \chi^2)(d) (cz + d)^k g(z).$$

On a donc la bonne formule de transformation. De plus,  $g$  conserve la régularité de  $f$  puisque pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma$ ,  $g_k^\gamma$  s'exprime comme une combinaison linéaire des  $f_k^{\gamma_k \gamma}$  pour  $0 \leq k \leq N_1 - 1$  un entier, pour lesquelles on peut utiliser le lemme 43. On a donc bien montré que  $g$  appartenait à  $\mathcal{M}_k(N_0 N_1^2, \chi_0 \chi_1^2)$ .  $\square$

## IV. Les fonctions thêta.

### i) DÉFINITION ET PREMIÈRES FORMULES.

**Définition 54.** On définit la fonction suivante sur  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$  :

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi n^2 z}.$$

Ainsi que l'application suivante sur  $\mathbb{H}$  :

$$\Theta(z) = \theta(2iz) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}.$$

*Lemme 55* (Formule de sommation de POISSON<sup>12</sup>). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $f'(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  lorsque  $|x|$  tend vers l'infini. On pose pour tout entier  $n$  :  $\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi n x} dx$ . On a alors l'identité :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

12. Siméon Denis POISSON, mathématicien et physicien français, polytechnicien (1781-1840).



*Démonstration.* Posons pour tout réel  $x$  :  $h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ , qui est bien définie car  $f$  décroît suffisamment vite par hypothèse. La fonction  $h$  est 1-périodique. On a donc une décomposition de FOURIER :  $h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n x}$ , où pour tout entier  $n$ ,

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 h(x) e^{-2i\pi n x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi n x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi n x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi n x} dx \\ &= \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Le résultat est alors simplement l'évaluation en 0 de l'application  $h$ . □

**Propriété 56.** *Pour tout complexe de partie réelle strictement positive  $z$ , on a la formule d'inversion suivante :*

$$\theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{z} \theta(z),$$

où  $\sqrt{\phantom{x}}$  désigne la racine carrée de partie réelle positive définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{-*}$ .  
Notamment, si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$ ,

$$\Theta\left(-\frac{1}{4z}\right) = \sqrt{\frac{2z}{i}} \Theta(z).$$

*Démonstration.* Montrons d'abord l'identité sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On pose  $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow e^{-\pi t x^2} \in \mathbb{R}$  où  $t$  est un réel strictement positif fixé. La fonction  $f$  vérifie les hypothèses de la sommation de POISSON, d'où :

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

Si  $n$  est un entier,

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n x - \pi t x^2} dx = e^{-\pi \frac{n^2}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (x - i \frac{n}{t})^2} dx = e^{-\pi \frac{n^2}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{n^2}{t}}.$$

En effet, comme l'application holomorphe  $z \rightarrow e^{-\pi t z^2}$  tend vers 0 lorsque  $|z|$  tend vers l'infini, on peut changer de chemin, justifiant la troisième égalité. En injectant ce résultat dans la sommation de POISSON, il vient alors :

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \theta(x).$$

Maintenant, notons que chacun des deux membres de cette identité est une application holomorphe sur  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ , et que les fonctions coïncident sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Le principe des zéros isolés permet donc d'étendre cette égalité à tout  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ . □

**Propriété 57.** *L'application  $\Theta^2$  appartient à  $\mathcal{M}_1(4, \chi)$  où  $\chi : d \rightarrow (-1)^{\frac{d-1}{2}}$  est le caractère de DIRICHLET non-trivial modulo 4.*

*Notamment, si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $\Gamma_0(4)$ , alors  $(\Theta^2)_1^\gamma = (-1)^{\frac{d-1}{2}} \Theta^2$ .*

*Démonstration.* D'abord, on a ici  $\mathcal{M}_1(\Gamma_1(4)) = \mathcal{M}_1(4, \chi)$  d'après la propriété 52. Ensuite, on dispose d'un système générateur de  $\Gamma_0(4)$  que l'on admettra :  $-\text{id}$ ,  $\Gamma$  et  $ST^4S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ . Parmi ces générateurs,  $\Gamma$  appartient à  $\Gamma_1(N)$ , les autres non. Vérifions alors les trois relations souhaitées.

$$(\Theta^2)_1^{\Gamma} = \Theta^2 = \chi(1)\Theta^2.$$

$$(\Theta^2)_1^{-\text{id}} = -\Theta^2 = \chi(-1)\Theta^2.$$

Posons ensuite  $\alpha_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ . Aussi,  $\alpha_N^{-1} = -\frac{1}{N}\alpha_N$  et on calcule

$$\alpha_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \alpha_N^{-1} = \begin{pmatrix} -d & -\frac{c}{N} \\ -Nb & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $ST^4S = -\alpha_4 \Gamma \alpha_4^{-1} = \frac{1}{4} \alpha_4 \Gamma \alpha_4$ . Or,

$$(\Theta^2)_1^{\alpha_4} (z) = \frac{1}{2z} \Theta^2 \left( -\frac{1}{4z} \right) = -i \Theta^2(z).$$

Donc, en notant que  $\frac{1}{4} \text{id}$  agit trivialement :

$$(\Theta^2)_1^{ST^4S} = (\Theta^2)_1^{\alpha_4 \Gamma \alpha_4} = -i (\Theta^2)_1^{\Gamma \alpha_4} = -i (\Theta^2)_1^{\alpha_4} = -\Theta^2 = \chi(-1)\Theta^2.$$

□

**Définition 58.** On définit les fonctions suivantes sur  $\mathbb{H}$  :

$$\begin{cases} \theta_{00}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}, \\ \theta_{01}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi n^2 z}, \\ \theta_{10}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2 z}. \end{cases}$$

*Remarque.* (i) D'abord, on peut remarquer que l'on a bien l'absolue convergence de toutes ces sommes sur  $\mathbb{H}$ .

(ii) Ensuite, notons que l'on a les identités suivantes :  $\theta_{00}(z) = \theta(iz)$ .

**Propriété 59.** On a les formules suivantes :

$$\begin{cases} \theta_{00}(z+1) = \theta_{01}(z), \\ \theta_{01}(z+1) = \theta_{00}(z), \\ \theta_{10}(z+1) = e^{\frac{i\pi}{4}} \theta_{10}(z). \end{cases}$$

*Notamment :*

$$\begin{cases} \theta_{00}^4(z+1) = \theta_{01}^4(z), \\ \theta_{01}^4(z+1) = \theta_{00}^4(z), \\ \theta_{10}^4(z+1) = -\theta_{10}^4(z). \end{cases}$$

*Démonstration.* Notons pour commencer que si  $n$  est un entier,  $e^{i\pi n^2} = (-1)^n$ . On a alors directement les deux premières formules :

$$\begin{cases} \theta_{00}(z+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z} e^{i\pi n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi n^2 z} = \theta_{01}(z), \\ \theta_{01}(z+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi n^2 z} e^{i\pi n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z} = \theta_{00}(z). \end{cases}$$

Ensuite,  $e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2} = e^{i\pi n^2} e^{i\pi n} e^{\frac{i\pi}{4}} = (-1)^n (-1)^n e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$ . D'où :

$$\theta_{10}(z+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2} z e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2} z e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \theta_{10}(z).$$

□

**Propriété 60.** On a les formules de transformation suivantes :

$$\begin{cases} z^{-2}\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{00}^4(z), \\ z^{-2}\theta_{01}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{10}^4(z), \\ z^{-2}\theta_{10}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{01}^4(z). \end{cases}$$

*Démonstration.* On applique les formules de transformation de  $\theta$  (propriété 56) :

$$z^{-2}\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{-2}\theta^4\left(-\frac{i}{z}\right) = z^{-2}\left(-\frac{z}{i}\right)^2 = \theta^4\left(-\frac{z}{i}\right) = -\theta_{00}^4(z).$$

Ensuite, notons les identités suivantes :

$$\begin{cases} \theta_{00}(z) + \theta_{01}(z) = 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ pair}}} e^{i\pi n^2 z} = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi 4n^2 z} = \theta_{00}(4z), \\ \theta_{00}(z) + \theta_{10}(z) = \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} z e^{i\pi n^2 z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi \frac{n^2}{4} z} = \theta_{00}\left(\frac{z}{4}\right). \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\theta_{01}\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\theta_{00}\left(-\frac{2}{z}\right) - \theta_{00}\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\sqrt{\frac{iz}{4}}\theta_{00}\left(\frac{z}{4}\right) - \sqrt{iz}\theta_{00}(z) = \sqrt{iz}\theta_{10}(z).$$

D'où :

$$z^{-2}\theta_{01}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{10}^4(z).$$

En appliquant de nouveau la matrice  $S$ , comme  $S^2 = \text{id}$ , il vient :

$$z^{-2}\theta_{10}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{01}^4(z).$$

□

**Propriété 61** (Identité de JACOBI<sup>13</sup>). On a l'identité :

$$\theta_{01}^4 + \theta_{10}^4 = \theta_{00}^4.$$

*Démonstration.* Définissons l'application

$$f = (\theta_{01}^4 + \theta_{10}^4 - \theta_{00}^4)^2.$$

On a clairement que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}$ . Lorsque  $z$  tend vers  $\infty$ , on a :

$$\begin{cases} \theta_{00}(z) \longrightarrow 1, \\ \theta_{01}(z) \longrightarrow 1, \\ \theta_{10}(z) \longrightarrow 0. \end{cases}$$

13. Carl Gustav Jakob JACOBI, mathématicien allemand (1804-1851).

Aussi,

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

Notamment,  $f$  est holomorphe en  $\infty$ .

Vérifions que  $f$  est une forme elliptique. On a les formules de transformation sous l'action de  $T$  et  $S$  :

$$\begin{cases} f(z+1) = (\theta_{00}(z)^4 - \theta_{10}(z)^4 - \theta_{01}(z)^4)^2 = f(z), \\ z^{-4}f(-\frac{1}{z}) = -(\theta_{10}(z)^4 - \theta_{01}(z)^4 + \theta_{01}(z)^4)^2 = f(z). \end{cases}$$

Donc  $f \in \mathcal{E}_4(\Gamma)$ . Or, cet espace n'est autre que  $\{0\}$  d'après le théorème 31.

On est déduit que  $f$  est alors la fonction nulle sur  $\mathbb{H}$  est donc l'identité souhaitée. □

## ii) SYMBOLE DE LEGENDRE.

**Définition 62.** On définit comme précédent le symbole de LEGENDRE de deux entiers  $c$  et  $d$  où  $d$  est un nombre premier impair par :

$$\left(\frac{c}{d}\right)_{\mathcal{L}} = \begin{cases} 0 & \text{si } d \text{ divise } c \\ 1 & \text{si } c \text{ est un résidu quadratique non-nul modulo } d \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On généralise cette définition à  $c$  et  $d$  deux entiers quelconques où  $d$  est demeure impair :

(i) On pose  $\left(\frac{0}{\pm 1}\right)_{\mathcal{L}} = 1$ .

(ii) Sinon si  $c$  et  $d$  ne sont pas premiers entre eux, alors  $\left(\frac{c}{d}\right)_{\mathcal{L}} = 0$ .

(iii) Sinon on décompose  $|d|$  en facteurs de nombres premiers :  $|d| = \prod_{i=1}^k p_i$ . On définit alors :

$$\left(\frac{c}{d}\right)_{\mathcal{L}} = \begin{cases} \prod_{i=1}^k \left(\frac{c}{|d|}\right)_{\mathcal{L}} & \text{si } c > 0 \\ -\prod_{i=1}^k \left(\frac{c}{|d|}\right)_{\mathcal{L}} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

**Propriété 63.** L'application  $(c, d) \rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)_{\mathcal{L}}$  est bi-multiplicative.

*Démonstration.* Etant donné les conventions choisies, la multiplicativité en  $d$  est claire. De plus, pour la multiplicativité en  $c$ , les conventions sont choisies de sorte à ce qu'il suffise de la vérifier pour  $d$  premier.

Soient  $a$  et  $b$  de résidus quadratiques non-nuls modulo  $d$ , où  $d$  est un nombre premier impair. On a donc  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $a = \alpha^2$  et  $b = \beta^2$ . On peut alors écrire  $ab = (\alpha\beta)^2$ . Donc  $ab$  est encore un résidu non-nul modulo  $d$ , ce qui est cohérent avec  $1 \times 1 = 1$ .

Notons ensuite qu'il y a  $\frac{d-1}{2}$  résidus dans  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ . En effet, l'application  $x \rightarrow x^2$  est un morphisme de groupes de noyau  $\{-1, +1\}$ . De plus, si  $x$  n'est pas un résidu quadratique et  $A$  l'ensemble des résidus quadratique, on peut écrire  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^* = A \cup xA$ . Soit alors  $a$  un résidu quadratique,  $a = \alpha^2$  et  $b$  n'est étant pas un,  $b = x\beta^2$ . On a alors  $ab = x(\alpha\beta)^2$  n'est pas un résidu quadratique modulo  $d$ , ce qui est cohérent avec  $1 \times (-1) = -1$ . Enfin, si  $a$  et  $b$  ne sont pas des résidus quadratiques,  $a = x\alpha^2$  et  $b = c\beta^2$ . Alors  $ab = (x\alpha\beta)^2$  est un résidu quadratique, ce qui est cohérent avec  $(-1) \times (-1) = 1$ . □

**Propriété 64.** Si  $d$  est strictement positif, et  $c$  est un entier, alors  $\left(\frac{c+d}{d}\right)_{\mathcal{L}} = \left(\frac{c}{d}\right)_{\mathcal{L}}$ .

*Démonstration.* Il suffit de noter que  $c + d \equiv c[d]$ . □

**Propriété 65.** Si  $d$  est un entier impair, alors  $\left(\frac{-1}{d}\right)_\mathfrak{z} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}$ .

*Démonstration.* Notons d'abord la multiplicativité du membre de droite. Si  $d = d_1 d_2$ , avec  $d_i = 4k_i + \alpha_i$  où  $\alpha_i = \pm 1$ , pour  $i$  allant de 1 à 2, on regarde les différents cas, et obtient :

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}} = (-1)^{\frac{\alpha_1 \alpha_2 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}} (-1)^{\frac{\alpha_2 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{d_1 - 1}{2}} (-1)^{\frac{d_2 - 1}{2}}.$$

La convention pour  $d$  négatif fonctionne de même. Ainsi, on peut se ramener à  $d$  nombre premier impair. On regarde sa congruence modulo 4 et se demande si  $-1$  est un carré dans  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$  qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}/(d-1)\mathbb{Z}$ , i.e. cyclique de cardinal  $d-1$ .

Si 4 divise  $d-1$ , on a alors un élément d'ordre 4,  $x$ . Mais  $x^2$  est d'ordre 2, donc nécessairement  $-1$ . Réciproquement, si on a un élément  $x$  tel que  $x^2 = -1$ ,  $x$  est d'ordre 4, d'où 4 divise  $d-1$  par le théorème de LAGRANGE<sup>14</sup>.  $\square$

### iii) TRANSFORMATION DE LA FONCTION $\Theta$ .

Dans la suite, on notera  $\sqrt{\phantom{x}}$  la racine carrée dont l'argument appartient à  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Définition 66.** On définit pour tout entier impair  $d$  :

$$\epsilon_d = \sqrt{\left(\frac{-1}{d}\right)_\mathfrak{z}} = \begin{cases} 1 & \text{si } d \equiv 1[4] \\ i & \text{si } d \equiv 3[4]. \end{cases}$$

Puis, pour  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $\Gamma_0(4)$  et  $z$  appartenant à  $\mathbb{H}$  :

$$j(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right)_\mathfrak{z} \frac{\sqrt{cz+d}}{\epsilon_d}.$$

**Théorème 67.** Pour tout  $\gamma$  appartenant à  $\Gamma_0(4)$  et  $z$  dans  $\mathbb{H}$ , on a la formule de transformation suivante :

$$\Theta(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)\Theta(z).$$

*Démonstration.* D'abord,  $c$  est premier avec  $d$ . Alors  $j(\gamma, z)^2 = \left(\left(\frac{c}{d}\right)_\mathfrak{z}\right)^2 \left(\frac{-1}{d}\right)_\mathfrak{z} (cz+d) = (-1)^{\frac{d-1}{2}} (cz+d)$ . Or, on a déjà vu dans la propriété 57 que  $(\Theta^2)_1^{|\gamma} = (-1)^{\frac{d-1}{2}} \Theta^2$ . Ainsi, on a déjà démontré

$$\Theta^2(\gamma \cdot z) = j(\gamma, z)^2 \Theta^2(z).$$

Il vient alors, à  $\gamma$  fixé et  $z$  dans  $\mathbb{H}$  :

$$\frac{j(\gamma, z)\Theta(z)}{\Theta(\gamma \cdot z)} = \pm 1.$$

Le théorème se résume alors à montrer qu'il s'agit bien de 1.  $\square$

**Définition 68.** On définit le groupe :

$$\mathfrak{S}(2) = \langle \pm T^2, S \rangle \subset \Gamma(2).$$

14. Joseph-Louis LAGRANGE, mathématicien et physicien italien puis français (1736-1813).

*Lemme 69.* On admet la description de  $\mathfrak{S}(2)$  suivante :

$$\mathfrak{S}(2) = \{\gamma \in \Gamma, \text{ tel que } \gamma \equiv \text{id ou } S \pmod{2}\}.$$

**Définition 70.** On pose l'application

$$\Phi(z) = \Theta\left(\frac{z}{2}\right).$$

*Remarque.* On a les formules de transformation :  $\Phi(T^2 \cdot z) = \Phi(z)$  et  $\Phi(S \cdot z) = \sqrt{-iz}\Phi(z)$ .

*Lemme 71.* Le théorème 67 est impliqué par la formule de transformation suivante : si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$  et  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv S \pmod{2}$  et  $d \neq 0$ , alors

$$\Phi(\gamma \cdot z) = i^{\frac{1-c}{2}} \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{S}} \sqrt{-i(cz+d)}\phi(z).$$

*Preuve.* Supposons la formule du lemme vérifiée. Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  appartenant à  $\Gamma_0(4)$ . Si  $c = 0$ , nécessairement  $a = d = \pm 1$ . Or,  $\Theta$  est 1-périodique, donc  $\Theta(\gamma \cdot z) = \Theta(z)$ . D'autre part,  $j(\gamma, z) = \epsilon_d^{-1}\sqrt{d} = 1$ . En effet, si  $d = 1$ ,  $\epsilon_d = \sqrt{d} = 1$  et si  $d = -1$ ,  $\epsilon_d = \sqrt{d} = i$ . Alors le théorème est vrai.

On peut alors supposer  $c \neq 0$ . On a :

$$\Theta(\gamma \cdot z) = \Phi\left(2\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Phi\left(\frac{2b\frac{-1}{2z}-a}{d\frac{-1}{2z}-\frac{c}{2}}\right) = \Phi\left(\gamma' \cdot \frac{-1}{2z}\right)$$

où

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 2b & -a \\ d & -\frac{c}{2} \end{pmatrix}.$$

Or,  $c \equiv 0[4]$ , donc  $\gamma' = \pm S \pmod{2}$ . On peut donc utiliser notre hypothèse. De plus, en notant que  $d$  est premier avec 4, on a :

$$\left(\frac{-\frac{c}{2}}{d}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{-\frac{c}{2}}{d}\right)_{\mathfrak{S}} \left(\frac{4}{d}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{-2c}{d}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{-2}{d}\right)_{\mathfrak{S}} \left(\frac{c}{d}\right)_{\mathfrak{S}}.$$

Ainsi,

$$\Theta(\gamma \cdot z) = i^{\frac{1-d}{2}} \left(\frac{-2}{d}\right)_{\mathfrak{S}} \left(\frac{c}{d}\right)_{\mathfrak{S}} \sqrt{-i\left(d\frac{-1}{2z}-\frac{c}{2}\right)}\Phi\left(-\frac{1}{2z}\right).$$

Mais on a  $\Phi\left(-\frac{1}{2z}\right) = \Theta\left(-\frac{1}{4z}\right) = \sqrt{-2iz}\Theta(z)$ . Le produit des racines  $\pm\sqrt{cz+d}$ . En effet, le signe provient de la branche de la racine considérée. Néanmoins ici, dans le cas  $z = i$ , on observe que l'on est dans le cas positif, propriété qui s'étend à tout  $z$  par continuité.

Ensuite, montrons que  $i^{\frac{1-d}{2}} \left(\frac{-2}{d}\right)_{\mathfrak{S}} = \epsilon_d^{-1}$ . On admet que  $\left(\frac{-2}{d}\right)_{\mathfrak{S}}$  ne dépend que de  $d \pmod{8}$ . Il ne reste alors plus qu'à considérer les différentes valeurs possible de  $d$  modulo 8 : 1, 3, 5 ou 7. Dans chacun de ces cas, l'identité est clairement vérifiée.

On a finalement bien montré la formule souhaitée :

$$\Theta(\gamma \cdot z) = \left(\frac{c}{d}\right)_{\mathfrak{S}} \frac{\sqrt{cz+d}}{\epsilon_d} \Theta(z).$$

□

**Définition 72.** Soit  $p$  un nombre premier impair, on définit pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$  :

$$\psi_p(z) = \frac{\eta^p(z)}{\eta(pz)}$$

où  $\eta$  est la fonction êta de DEDEKIND définie par  $\eta(z) = e^{\frac{2i\pi z}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z})$ .

*Lemme 73.* Soit  $p$  un nombre premier impair et  $z$  un élément de  $\mathbb{H}$ , alors on a l'égalité suivante :

$$\frac{\Phi(pz)}{\Phi^p(z)} = \frac{\psi_p(z)}{\psi_p^2\left(\frac{z+1}{2}\right)}.$$

*Preuve.* Pour commencer, justifions que

$$\eta\left(z + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2i\pi}{48}} \frac{\eta^3(2z)}{\eta(z)\eta(4z)}.$$

Cette identité est équivalente à :

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 - (-1)^n q^n) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(1 - q^{2n})^3}{(1 - q^n)(1 - q^{4n})}.$$

Le membre de gauche se réécrit :

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 - (-1)^n q^n) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 - q^{2n})(1 + q^{2(2n+1)}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(1 - q^{2n})(1 + q^n)}{(1 + q^{2n})}.$$

Le membre de droite se réécrit :

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(1 - q^{2n})^3}{(1 - q^n)(1 - q^{4n})} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + q^n)(1 - q^{2n})}{(1 + q^{2n})}.$$

D'où le résultat. Ensuite, on va montrer le résultat suivant :

$$\Theta(z) = e^{-\frac{2i\pi}{24}} \frac{\eta^2\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\eta(2z)} = \frac{\eta^5(2z)}{\eta^2(z)\eta^2(4z)}.$$

Ceci revient, en divisant l'argument par 2, à montrer :

$$\theta_{00}(z) = \frac{\eta^5(z)}{\eta^2(2z)\eta^2\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Déjà, en  $\infty$ , les deux membres tendent vers 1. Comme les deux membres sont holomorphes sur  $\mathbb{H}$  et en  $\infty$ , il suffit de montrer la puissance 24 de cette identité, *i.e.*

$$\theta_{00}^{24}(z) = \frac{\Delta^5(z)}{\Delta^2(2z)\Delta^2\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Mais d'après nos formules de transformation pour  $T^2$  et  $S$ , ces deux membres sont des formes modulaires de poids 12 sur  $\mathfrak{S}(2)$ . Le membre de droite ne s'annulant ni sur  $\mathbb{H}$ , ni sur les pointes, on peut diviser celui-ci pour obtenir une forme modulaire de poids nul pour  $\mathfrak{S}(2)$ , *i.e.* une constante. Les deux membres donc colinéaires et égaux par identification à  $\infty$ .

On a donc démontré :

$$\Theta(z) = e^{-\frac{2i\pi}{24}} \frac{\eta^2\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\eta(2z)}.$$

Ainsi,

$$\frac{\Phi(pz)}{\Phi^p(z)} = e^{\frac{2i\pi}{24}(p-1)} \frac{\eta^2\left(\frac{pz+1}{2}\right)}{\eta(pz)} \left(\frac{\eta^2\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\eta(z)}\right)^{-p} = e^{\frac{2i\pi}{24}(p-1)} \frac{\eta^p(z)}{\eta(pz)} \left(\frac{\eta\left(\frac{pz+1}{2}\right)}{\eta^p\left(\frac{z+1}{2}\right)}\right)^2.$$

De plus,

$$\psi_p\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\eta^p\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\eta\left(\frac{pz+1}{2} + \frac{p-1}{2}\right)}.$$

Or,  $\eta(z+1) = e^{\frac{2i\pi}{24}} \eta(z)$ . Ainsi,

$$\psi_p\left(\frac{z+1}{2}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{24} \frac{p-1}{2}} \frac{\eta^p\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\eta\left(\frac{pz+1}{2}\right)}.$$

Donc on a bien :

$$\frac{\Phi(pz)}{\Phi^p(z)} = \frac{\psi_p(z)}{\psi_p^2\left(\frac{z+1}{2}\right)}.$$

□

**Définition 74.** Soit  $p$  un nombre premier impair, on définit pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$  :

$$\begin{cases} f_p(z) = \psi_p^3\left(\frac{z+1}{2}\right), \\ g_p(z) = \frac{\Phi(pz)}{\Phi^p(z)}. \end{cases}$$

Et plus généralement, si  $n$  est un entier positif impair, on définit

$$g_n(z) = \frac{\Phi(nz)}{\Phi^n(z)}.$$

*Lemme 75.* Soit  $p$  un nombre premier impair. Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un élément de  $\mathfrak{S}(2) \cap \Gamma_0(p)$ , alors

$$\begin{cases} (f_p)_{\frac{3p-1}{2}}^\gamma = \begin{pmatrix} d \\ p \end{pmatrix}_{\mathfrak{L}} f_p, \\ (g_p)_{\frac{p-1}{2}}^\gamma = \begin{pmatrix} d \\ p \end{pmatrix}_{\mathfrak{L}} g_p. \end{cases}$$

Et plus généralement, si  $n$  est un entier positif impair, on a :

$$(g_n)_{\frac{n-1}{2}}^\gamma = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}_{\mathfrak{L}} g_n.$$

*Démonstration.* Posons la matrice  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $\psi_p\left(\frac{z+1}{2}\right) = \psi_p(\alpha \cdot z)$ . On a alors :

$$\psi_p\left(\frac{\gamma \cdot z + 1}{2}\right) = \psi_p(\alpha\gamma \cdot z) = \psi_p((\alpha\gamma\alpha^{-1})\alpha \cdot z).$$

On calcule :

$$\alpha\gamma\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a+c & \frac{b+d-a-c}{2} \\ 2c & d-c \end{pmatrix}.$$



Notons que comme  $\gamma$  appartient à  $\mathfrak{S}(2)$ ,  $\gamma \equiv \text{id}$  ou  $S \pmod{2}$  d'après le lemme 69. Ainsi,  $b + d - a - c$  est bien pair. On peut donc appliquer la formule de transformation de  $\psi_p$  issue de la propriété 49. Notons de plus que  $d - c \equiv d[p]$ . On a alors :

$$\psi_p^3\left(\frac{\gamma \cdot z + 1}{2}\right) = \left(\frac{d-c}{p}\right)_{\mathfrak{E}} (2c\alpha \cdot z + d - c)^{-3\frac{p-1}{2}} \psi_p^3(\alpha \cdot z) = \left(\frac{d}{p}\right)_{\mathfrak{E}} (cz + d)^{-3\frac{p-1}{2}} \psi_p^3\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

La suite du lemme, principalement technique et utilisant les lemmes 69 et 73, ainsi que la première partie du lemme, ne sera pas détaillée ici.  $\square$

*Suite de la démonstration du théorème 67.* Grâce au lemme 71, il suffit de montrer que si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$  et  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv S \pmod{2}$  et  $d \neq 0$ , alors

$$\Phi(\gamma \cdot z) = i^{\frac{1-c}{2}} \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{E}} \sqrt{-i(cz+d)} \phi(z).$$

Quitte à changer  $\gamma$  en s'on opposé, on peut supposer  $c > 0$ .

D'après le lemme 75, avec  $n = c$ , on a :

$$\frac{\phi(c\gamma \cdot z)}{\phi^c(\gamma \cdot z)} = \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{E}} (cz + d)^{\frac{1-c}{2}} \frac{\phi(cz)}{\phi^c(z)}.$$

D'où :

$$\left(\frac{\phi(\gamma \cdot z)}{\phi(z)}\right)^c = \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{E}} \frac{\phi(c\gamma \cdot z)}{\phi^c(z)} (cz + d)^{\frac{1-c}{2}}.$$

Mais comme  $ad - bc = 1$ , on peut écrire

$$c\gamma \cdot z = c \frac{az + b}{cz + d} = a - \frac{1}{cz + d}.$$

Or,  $a$  et  $d$  sont pairs et  $\phi$  est 2-périodique. Aussi,

$$\phi(c\gamma \cdot z) = \phi\left(-\frac{1}{cz + d}\right) = \sqrt{-i(cz + d)} \phi(cz + d) = \sqrt{-i(cz + d)} \phi(cz).$$

Ainsi,

$$\left(\frac{\phi(\gamma \cdot z)}{\phi(z)}\right)^c = \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{E}} \sqrt{-i(cz + d)} (cz + d)^{\frac{1-c}{2}}.$$

D'autre, on admettra ici que l'on peut montrer que  $\phi^8$  est invariant sous l'action de  $\mathfrak{S}(2)$ . Donc si  $k$  est un entier, on a :

$$\left(\frac{\phi(\gamma \cdot z)}{\phi(z)}\right)^{8k} = (cz + d)^{4k}.$$

Mais comme  $c$  est impair, on a  $k$  tel que  $c^2 = 8k + 1$ . Ainsi, en combinant la première formule à la puissance  $c$  avec la seconde pour le  $k$  correspondant, on obtient :

$$\frac{\phi(\gamma \cdot z)}{\phi(z)} = \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{E}} (-i(cz + d))^{\frac{c}{2}} (cz + d)^{c\frac{1-c}{2} - 4k} = \left(\frac{d}{c}\right)_{\mathfrak{E}} i^{\frac{1-c}{2}} \sqrt{-i(cz + d)}.$$

D'où le résultat.  $\square$

## CHAPITRE

# 2

# COMPACITÉ OPTIMALE EN DIMENSION HUIT.

DANS ce chapitre, nous allons voir une application amusante et inattendue des formes modulaires. Le problème est le suivant : comment empiler des sphères de la manière la plus compacte possible. A deux dimensions, on se convainc facilement qu'il suffit de placer les étages de cercles en quinconce. A trois dimensions, c'est classiquement le tas d'oranges. Ce résultat est tout à fait naturel, et il n'est pas nécessaire de faire des mathématiques pour l'intuiter. Pourtant, sa démonstration n'est pas si aisée. Ce problème, au delà du marché, est aussi intéressant en physique d'un point de vu cristallographique. En effet, on peut souhaiter un matériau très compact en arrangeant les atomes de façon optimale, tout en évitant les chevauchements qui sont énergétiquement peu intéressants. Mais plus généralement, ce problème peut se poser en dimension quelconque. Dans  $\mathbb{R}^d$ , où  $d$  est un entier positif, on cherche alors un réseau, *i.e.* un sous-ensemble discret  $X$  tel que pour tous éléments distincts  $x$  et  $y$  de  $X$ , on ait  $\|x - y\| \geq 2$ . La compacité sera alors naturellement le volume de

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{x \in X} B(x, 1),$$

où  $B(x, r)$  désigne la boule de centre  $x$  et rayon  $r$ . Et le tout divisé par le volume total ! Pour formaliser cela, on définit la compacité comme :

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{P}} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}(\mathfrak{P} \cap B(0, r))}{\text{Vol}(B(0, r))},$$

où  $\text{Vol}$  désigne la mesure de LEBESGUE<sup>1</sup> sur  $\mathbb{R}^d$ .

ICI, on considérera le cas de dimension  $d = 8$ . Et démontrera que la compacité optimale, *i.e.* la plus grande, est égale à  $\frac{\pi^4}{384}$ , soit environ 0,25.

---

1. Henri LEBESGUE, mathématicien français, normalien (1875-1941).

Ce chapitre s'appuie principalement sur les articles *The sphere packing problem in dimension 8* de Maryna S. VIAZOVSKA[2] et *New upper bounds on sphere packings* de H. COHN et N. ELKIES[3]. Pour obtenir les coefficients des développements en séries des fonctions utiles, une possibilité est d'utiliser la méthode du cercle. Celle-ci est présentée dans le chapitre 20 du livre *Analytic number theory* de Henryk IWANIEC et Emmanuel KOWALSKI[4].

## I. Construction des fonctions utiles.

### i) INTRODUCTION.

**Définition 76.** On définit les applications suivantes :

$$\begin{cases} \varphi_{-2} = -1728 \frac{E_4 E_6}{E_3^3 - E_6^2} = -\frac{E_4 E_6}{\Delta}, \\ \varphi_{-4} = 1728 \frac{E_4^3}{E_3^3 - E_6^2} = \frac{E_4^3}{\Delta}. \end{cases}$$

Puis ensuite :

$$\begin{cases} \Phi_{-4} = \varphi_{-4}, \\ \Phi_{-2} = \varphi_{-4} E_2 + \varphi_{-2}, \\ \Phi_0 = \varphi_{-4} E_2^2 + 2\varphi_{-2} E_2 + j - 1728. \end{cases}$$

**Propriété 77.** Toutes les applications précédemment définies sont holomorphes sur  $\mathbb{H}$ . De plus,  $\varphi_{-2}$  et  $\varphi_{-4}$  sont des fonctions modulaires, de poids respectifs  $-2$  et  $-4$ .

On a également la loi de transformation de  $\Phi_0$  sous l'action de  $S$  :

$$\Phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) = \Phi_0(z) - \frac{12i}{\pi z} \Phi_{-2}(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2} \Phi_{-4}(z).$$

*Démonstration.* On applique  $S$  à la définition de  $\Phi_0$  :

$$\begin{aligned} \Phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) &= \varphi_{-4}(z) \left(E_2(z) - \frac{6i}{\pi z}\right)^2 - 2\varphi_{-2}(z) \left(E_2(z) - \frac{6i}{\pi z}\right) + j(z) - 1728 \\ &= \Phi_0(z) - \frac{12i}{\pi z} \varphi_{-4}(z) E_2(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2} \varphi_{-4}(z) + \frac{12i}{\pi z} \varphi_{-2}(z) \\ &= \Phi_0(z) - \frac{12i}{\pi z} \Phi_{-2}(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2} \Phi_{-4}(z). \end{aligned}$$

□

**Définition 78.** Si  $f$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{H}$ , on définit l'application

$$D(f)(z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{df}{dz}.$$

**Propriété 79.** On a les identités suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_{-2} = -3D(\varphi_{-4}) + 3\varphi_{-2}, \\ \Phi_0 = 12D^2(\varphi_{-4}) - 36D(\varphi_{-2}) + 24j - 17856. \end{cases}$$

*Démonstration.* On a l'identité suivante :

$$z^4 \varphi_{-4} \left(-\frac{1}{z}\right) = \varphi_{-4}(z).$$

Dérivons cette équation par rapport à  $z$  :

$$4z^3 \varphi_{-4} \left( -\frac{1}{z} \right) + 2i\pi z^2 D(\varphi_{-4}) \left( -\frac{1}{z} \right) = 2i\pi D(\varphi_{-4})(z).$$

D'où :

$$z^2 D(\varphi_{-4}) \left( -\frac{1}{z} \right) = D(\varphi_{-4})(z) + \frac{2i}{\pi z} \varphi_{-4}(z).$$

Posons alors

$$\psi(z) = 3D(\varphi_{-4})(z) + \varphi_{-4}(z)E_2(z) - 2\varphi_{-2}(z).$$

$\psi$  a la transformation suivante :

$$z^2 \psi \left( -\frac{1}{z} \right) = \psi(z) + \frac{6i}{\pi z} \varphi_{-4}(z) - \frac{6i}{\pi z} \varphi_{-4} = \psi(z).$$

Ainsi,  $\psi$  est une fonction modulaire de poids 2 pour  $\Gamma$ . Son seul pôle possible est en  $\infty$ , où certains termes y ont un pôle d'ordre 1. Calculons alors le coefficient total en  $q^{-1}$ , en notant que dériver par rapport à  $z$  revient à multiplier par  $-2i\pi$  le coefficient en  $q^{-1}$  :

$$-3 + 1 - 2(-1) = 0.$$

Ainsi,  $\psi$  n'a pas de pôle, c'est une forme modulaire de poids 2 pour  $\Gamma$ . Mais cela impose que  $\psi$  est nul. D'où le résultat.

La seconde identité se montre de façon analogue.  $\square$

**Propriété 80.** *On admettra les coefficients des développements des fonctions utiles, qui peuvent se calculer de diverses manières, notamment par la méthode du cercle comme expliqué dans l'introduction.*

$$\begin{cases} \phi_{-4}(z) = q^{-1} + 504 + 73764q + O(q^2), \\ \phi_{-2}(z) = 720 + 203040q + O(q^2), \\ \phi_0(z) = 518400q + O(q^2). \end{cases}$$

D'autre part, à l'aide des développements complets, on peut montrer que l'on a une constante  $C_0$  strictement positive telle que

$$\phi_0(z) \leq C_0 e^{-2\pi\Im(z)}.$$

Enfin, tous les coefficients de FOURIER de  $\phi_0$  sont réels.

**Définition 81.** Définissons la fonction suivante sur  $\mathbb{H}$  :

$$h = 128 \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8}.$$

**Propriété 82.** *Pour tout  $\gamma$  appartenant à  $\Gamma_0(2)$ , on a :*

$$h_{-2}^\gamma = h.$$

*Démonstration.* On admet que  $\Gamma_0(2)$  est engendré par les matrices  $T$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Rappelons que l'on a montré dans la propriété 59 :

$$\begin{cases} \theta_{00}^4(z+1) = \theta_{01}^4(z), \\ \theta_{01}^4(z+1) = \theta_{00}^4(z), \\ \theta_{10}^4(z+1) = -\theta_{10}^4(z). \end{cases}$$

Et dans la propriété 60 :

$$\begin{cases} z^{-2}\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{00}^4(z), \\ z^{-2}\theta_{01}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{10}^4(z), \\ z^{-2}\theta_{10}^4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\theta_{01}^4(z). \end{cases}$$

□

On a donc immédiatement  $\mathbf{h}_{-2}^{\text{T}} = \mathbf{h}$ . D'autre part, calculons l'effet de  $A$  sur  $\theta_{00}$  :

$$\begin{aligned} \theta_{00}^4(A \cdot z) &= \theta_{00}^4\left(\frac{z}{2z+1}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{00}^4\left(-\frac{2z+1}{z}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{00}^4\left(-2 - \frac{1}{z}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{00}^4\left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= -(2z+1)^2 \theta_{00}^4(z). \end{aligned}$$

Puis sur  $\theta_{01}$  :

$$\begin{aligned} \theta_{01}^4(A \cdot z) &= \theta_{01}^4\left(\frac{z}{2z+1}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{10}^4\left(-\frac{2z+1}{z}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{10}^4\left(-2 - \frac{1}{z}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{10}^4\left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= (2z+1)^2 \theta_{01}^4(z). \end{aligned}$$

Et enfin  $\theta_{10}$  :

$$\begin{aligned} \theta_{10}^4(A \cdot z) &= \theta_{10}^4\left(\frac{z}{2z+1}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{01}^4\left(-\frac{2z+1}{z}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{01}^4\left(-2 - \frac{1}{z}\right) \\ &= -\left(\frac{2z+1}{z}\right)^2 \theta_{01}^4\left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= (2z+1)^2 \theta_{10}^4(z). \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{h}_{-2}^{\text{T}}(z) = (2z+1)^{-2} \mathbf{h}(A \cdot z) = \mathbf{h}(z).$$

**Propriété 83.** On admet que  $h$  n'a pas de pôle sur  $\mathbb{H}$ . De plus, en  $\infty$ , on peut démontrer le développement suivant :

$$h(z) = q^{-1} + 16 - 132q + O(q^2).$$

**Définition 84.** On définit les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \psi_I = h - h_{-2}^{ST}, \\ \psi_T = (\psi_I)_{-2}^{IT}, \\ \psi_S = (\psi_I)_{-2}^{IS}. \end{cases}$$

**Propriété 85.** On admet que l'on dispose des développements suivants en  $\infty$  :

$$\begin{cases} \psi_I(z) = q^{-1} + 144 - 5120q^{\frac{1}{2}} + O(q), \\ \psi_T(z) = q^{-1} + 144 + 5120q^{\frac{1}{2}} + O(q), \\ \psi_S(z) = -10240q^{\frac{1}{2}} + O(q). \end{cases}$$

De plus, tous les coefficients de FOURIER de  $\psi_I$  sont réels.

## ii) VALEUR PROPRE +1 DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.

**Définition 86.** On définit la fonction suivante sur  $\mathbb{R}^8$  :

$$\begin{aligned} a(x) = & \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) (z+1)^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz + \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) (z-1)^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz \\ & - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{i\pi\|x\|^2 z} dz. \end{aligned}$$

Si  $r$  est la norme de  $x$ , on s'autorisera l'abus de notation  $a(r) = a(x)$ .

*Remarque.* Notons que d'après la propriété 80,  $\phi(z) = O(e^{2i\pi z})$  lorsque  $\Im(z)$  tend vers  $+\infty$ , ce qui permet d'assurer que  $a$  est bien défini et que toutes les intégrales convergent uniformément.

**Définition 87** (Espace de SCHWARTZ et transformée de FOURIER). On définit l'espace de SCHWARTZ<sup>2</sup> comme étant l'espace des fonctions  $C^\infty$   $f$  de  $\mathbb{R}^8$  dans  $\mathbb{C}$  tel que pour tous entiers  $k$  et  $l$ , on ait

$$|f^{(m)}(x)| = o(\|x\|^{-k}), \text{ pour } \|x\| \rightarrow +\infty$$

où  $f^{(m)}$  désigne la dérivée  $m$ -ième de  $f$ .

Si  $f$  est une fonction de l'espace de SCHWARTZ, on définit alors sa transformée de FOURIER par :

$$\widehat{f} : k \in \mathbb{R}^8 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^8} f(x) e^{-2i\pi k \cdot x} dx \in \mathbb{C}$$

où  $k \cdot x$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^8$  de  $k$  et  $x$ . Notons que cette expression est bien définie.

*Remarque.* Rappelons que si  $f(x) = e^{i\pi\|x\|^2 z}$  pour un certain complexe  $z$ , alors  $f$  est une Gaussienne et l'on a  $\widehat{f}(k) = z^{-4} e^{i\pi\|k\|^2 (-\frac{1}{z})}$ .

**Propriété 88.** La fonction  $a$  appartient à l'espace de SCHWARTZ et sa transformée de FOURIER vérifie :

$$\widehat{a} = a.$$

---

2. Laurent SCHWARTZ, mathématicien français, normalien (1915-2002).

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\mathbf{a}$  appartient à l'espace de SCHWARTZ. Prenons  $r$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z+1} \right) (z+1)^2 e^{i\pi r^2 z} dz \right|_{\omega = -\frac{1}{z+1}} &= \left| \int_{i\infty}^{-\frac{1}{1+i}} \phi_0(\omega) \omega^{-4} e^{i\pi r^2 \left(-\frac{1}{\omega}-1\right)} d\omega \right| \\ &\leq C_0 \int_{i\infty}^{-\frac{1}{1+i}} e^{-2\pi \Im(\omega)} |\omega|^{-4} e^{-\pi r^2 \Im\left(-\frac{1}{\omega}\right)} d\omega \\ &\leq_{t = -\Im(\omega)} C_1 \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-2\pi t} |\omega|^{-4} e^{-\frac{\pi r^2}{t}} d\omega \end{aligned}$$

où  $C_1$  est une constante strictement positive, et ce en appliquant la propriété 80. Ce terme décroît donc bien plus vite que l'inverse de tout polynôme et il ne va de même de toutes ses dérivées. Les autres termes se traitent de façon similaire. Ainsi  $\mathbf{a}$  appartient bien à l'espace de SCHWARTZ.

Par linéarité de la transformée de FOURIER, on peut l'appliquer aux différents termes composant  $\mathbf{a}$  séparément et la permuter avec l'intégrale. On reconnaît alors des Gaussiennes, dont on connaît la transformée. Aussi,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{a}}(x) &= \int_{-1}^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z+1} \right) z^{-4} (z+1)^2 e^{i\pi \|x\|^2 \left(-\frac{1}{z}\right)} dz + \int_1^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z-1} \right) z^{-4} (z-1)^2 e^{i\pi \|x\|^2 \left(-\frac{1}{z}\right)} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^{-2} e^{i\pi \|x\|^2 \left(-\frac{1}{z}\right)} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) z^{-4} e^{i\pi \|x\|^2 \left(-\frac{1}{z}\right)} dz. \end{aligned}$$

On change ensuite  $z$  en  $-\frac{1}{z}$  dans les intégrales. Il vient :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{a}}(x) &= \int_1^i \phi_0 \left( 1 - \frac{1}{z-1} \right) z^2 \left( -\frac{1}{z} + 1 \right)^2 e^{i\pi \|x\|^2 z} dz + \int_{-1}^i \phi_0 \left( 1 - \frac{1}{z+1} \right) z^2 \left( -\frac{1}{z} - 1 \right)^2 e^{i\pi \|x\|^2 z} dz \\ &\quad - 2 \int_{i\infty}^i \phi_0(z) e^{i\pi \|x\|^2 z} dz + 2 \int_i^0 \phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^2 e^{i\pi \|x\|^2 z} dz. \end{aligned}$$

Puis finalement en utilisant la 1-périodicité de  $\phi_0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{a}}(x) &= \int_1^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z-1} \right) (1-z)^2 e^{i\pi \|x\|^2 z} dz + \int_{-1}^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z+1} \right) (1+z)^2 e^{i\pi \|x\|^2 z} dz \\ &\quad - 2 \int_{i\infty}^i \phi_0(z) e^{i\pi \|x\|^2 z} dz + 2 \int_i^0 \phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^2 e^{i\pi \|x\|^2 z} dz = \mathbf{a}(x). \end{aligned}$$

□

**Propriété 89.** Soit  $r > \sqrt{2}$  un réel, on a alors l'identité suivante :

$$\mathbf{a}(r) = -4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^{i\infty} \phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^2 e^{i\pi r^2 z} dz.$$

*Démonstration.* D'abord, rappelons l'égalité suivante, d'après la propriété 77 :

$$\phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) = \phi_0(z) - \frac{12i}{\pi z} \phi_{-2}(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2} \phi_{-4}(z).$$

Ainsi, la propriété 80 nous assure que lorsque  $z$  tend vers  $\infty$ ,  $\phi_0(z) = O(q)$  et  $\phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) = O(q^{-1})$ . Donc si  $r > \sqrt{2}$ , l'intégrale est bien définie et converge uniformément.

Notons  $d(r)$  le membre de droite de l'égalité et développons le sinus avec la formule d'EULER avant de translater les différentes intégrales. Il vient :

$$d(r) = \int_1^{i\infty} \phi_0 \left( -\frac{1}{z-1} \right) (1-z)^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz + \int_{-1}^{i\infty} \phi_0 \left( -\frac{1}{z+1} \right) (1+z)^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz \\ - 2 \int_0^{i\infty} \phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz.$$

On découpe alors chacune des intégrales avec d'une part le chemin jusqu'à  $i$ , et d'autre part le chemin de  $i$  à  $i\infty$ . Les trois premiers morceaux donnent bien les termes souhaités. Reste à étudier l'intégrale de  $i$  à  $i\infty$ . Le terme à intégrer sera :

$$\phi_0 \left( -\frac{1}{z-1} \right) (z-1)^2 - 2\phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^2 + \phi_0 \left( -\frac{1}{z+1} \right) (z+1)^2 \\ = \phi_0(z-1)(z-1)^2 - 2\phi_0(z)z^2 + \phi_0(z+1)(z+1)^2 \\ - \frac{12i}{\pi} (\phi_{-2}(z-1)(z-1) - 2\phi_{-2}(z)(z) + \phi_{-2}(z+1)(z+1)) \\ - \frac{26}{\pi^2} (\phi_{-4}(z) - 2\phi_{-4}(z) + \phi_{-4}(z+1)) \\ = 2\phi_0(z)$$

et ce grâce à la propriété 77 et la 1-périodicité des fonctions  $\phi_0$ ,  $\phi_{-2}$  et  $\phi_{-4}$ . On retrouve alors bien l'expression de  $\alpha$  :

$$\alpha(x) = \int_{-1}^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z+1} \right) (z+1)^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz + \int_1^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z-1} \right) (z-1)^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz \\ - 2 \int_0^i \phi_0 \left( -\frac{1}{z} \right) z^2 e^{i\pi\|x\|^2 z} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{i\pi\|x\|^2 z} dz.$$

□

**Propriété 90.** Soit  $r$  un réel positif, alors on a l'identité suivante :

$$\alpha(r) = 4i \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \left[ \frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} \left( t^2 \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) - \frac{36}{\pi} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right].$$

*Démonstration.* A l'aide des propriétés 77 et 80, on a le développement suivant lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  :

$$t^2 \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) = \frac{36}{\pi} e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} + O(t^2 e^{-2\pi t}).$$

Aussi, pour tout réel positif  $r$ , l'intégrale est bien définie et même absolument convergente. Mieux, si l'on étend la définition de cette intégrale à  $t$  complexe dans un voisinage de  $\mathbb{R}^+$ , cette intégrale définit une fonction holomorphe.

D'autre part, si  $r > \sqrt{2}$ , on peut décomposer l'intégrale par linéarité, et alors les termes correctifs se compensent exactement. Alors, on retrouve l'expression de la propriété 89 :

$$\alpha(r) = 4i \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^{+\infty} \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) t^2 e^{-\pi r^2 t} dt.$$



L'égalité est donc vraie si  $r > \sqrt{2}$ . Mais comme les deux membres s'étendent en fonctions holomorphes sur un voisinage de  $\mathbb{R}^+$ , l'égalité s'étend à  $r$  réel positif. □

**Propriété 91.** On a les valeurs suivantes pour la fonction  $\mathbf{a}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{a}(0) = -8640 \frac{i}{\pi}, \\ \mathbf{a}(\sqrt{2}) = 0, \\ \mathbf{a}'(\sqrt{2}) = 72\sqrt{2} \frac{i}{\pi}. \end{cases}$$

Avec  $\mathbf{a}'$  la dérivée de  $\mathbf{a}$ . De plus,  $\mathbf{a}$  est à valeurs dans  $i\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On reprend l'expression de  $\mathbf{a}$  obtenue dans la propriété 90 :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(r) = 4i \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) & \left[ \frac{36}{\pi^3(r^2 - 2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\ & \left. + \int_0^{+\infty} \left( t^2 \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) - \frac{36}{\pi} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right]. \end{aligned}$$

On fait alors les développements limités des différents termes lorsque  $r$  tend vers 0 ou  $\sqrt{2}$ . Le résultat est alors immédiat.

De plus, les coefficients de FOURIER de  $\phi_0$  sont réels d'après la propriété 80, aussi cette expression assure également que  $\mathbf{a}$  est à valeurs dans  $i\mathbb{R}$ . □

### iii) VALEUR PROPRE $-1$ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.

**Définition 92.** On définit la fonction suivante sur  $\mathbb{R}^8$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x) = & \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{i\pi \|x\|^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{i\pi \|x\|^2 z} dz \\ & - 2 \int_0^i \psi_I(z) e^{i\pi \|x\|^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{i\pi \|x\|^2 z} dz. \end{aligned}$$

Si  $r$  est la norme de  $x$ , on s'autorisera l'abus de notation  $\mathbf{b}(r) = \mathbf{b}(x)$ .

*Remarque.* Notons que d'après la propriété 85,  $\mathbf{b}$  est bien défini et toutes les intégrales convergent uniformément.

**Propriété 93.** La fonction  $\mathbf{b}$  appartient à l'espace de SCHWARTZ et sa transformée de FOURIER vérifie :

$$\widehat{\mathbf{b}} = -\mathbf{b}.$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\mathbf{b}$  appartient à l'espace de SCHWARTZ. Prenons  $r$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{i\pi r^2 z} dz \right| & \Big|_{\omega = -\frac{1}{z-1}} = \left| \int_{i\infty}^{-\frac{1}{1+i}} \psi_S(\omega) \omega^{-4} e^{i\pi r^2 \left(-\frac{1}{\omega} - 1\right)} d\omega \right| \\ & \leq C_2 \int_{i\infty}^{-\frac{1}{1+i}} e^{-\pi \Im(\omega)} e^{-\pi r^2 \Im\left(-\frac{1}{\omega}\right)} d\omega \\ & \leq C_1 \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-\pi t} |\omega|^{-4} e^{-\frac{\pi r^2}{t}} d\omega \end{aligned}$$

où  $C_2$  est une constante strictement positive, et ce en appliquant la propriété 80. Ce terme décroît donc bien plus vite que l'inverse de tout polynôme et il ne va de même de toutes ses dérivées. Les autres termes se traitent de façon similaire. Ainsi  $\mathbf{b}$  appartient bien à l'espace de SCHWARTZ.

Par linéarité de la transformée de FOURIER, on peut l'appliquer aux différents termes composant  $\mathbf{b}$  séparément et la permuter avec l'intégrale. On reconnaît alors des Gaussiennes, dont on connaît la transformée. Aussi,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) &= \int_{-1}^i \psi_{\mathbb{T}}(z) z^{-4} e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2(-\frac{1}{z})} dz + \int_1^i \psi_{\mathbb{T}}(z) z^{-4} e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2(-\frac{1}{z})} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \psi_{\mathbb{I}}(z) z^{-4} e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2(-\frac{1}{z})} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_{\mathbb{S}}(z) z^{-4} e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2(-\frac{1}{z})} dz.\end{aligned}$$

On change ensuite  $z$  en  $-\frac{1}{z}$  dans les intégrales. Il vient :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) &= \int_1^i \psi_{\mathbb{T}}\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz + \int_{-1}^i \psi_{\mathbb{T}}\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz \\ &\quad - 2 \int_{i\infty}^i \psi_{\mathbb{I}}\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz + 2 \int_i^0 \psi_{\mathbb{S}}\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz.\end{aligned}$$

Notons que  $(\psi_{\mathbb{I}})^{\mathbb{S}} = \psi_{\mathbb{S}}$  et  $(\psi_{\mathbb{S}})^{\mathbb{S}} = \psi_{\mathbb{I}}$ . Et de plus,

$$(\psi_{\mathbb{T}})^{\mathbb{S}} = (\mathbf{h})_{-2}^{\mathbb{T}\mathbb{S}} - (\mathbf{h})_{-2}^{\mathbb{S}\mathbb{T}\mathbb{S}}.$$

On calcule

$$\mathbb{S}\mathbb{T}^2\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\mathbb{S}\mathbb{T}^2\mathbb{S}$  appartient à  $\Gamma_0(2)$ , d'où  $(\mathbf{h})_{-2}^{\mathbb{S}\mathbb{T}^2\mathbb{S}} = \mathbf{h} = (\mathbf{h})_{-2}^{\mathbb{T}}$ . Ce qui entraîne aussi en appliquant  $\mathbb{S}$  :  $(\mathbf{h})_{-2}^{\mathbb{S}\mathbb{T}^2} = (\mathbf{h})_{-2}^{\mathbb{T}\mathbb{S}}$ . D'où finalement :

$$(\psi_{\mathbb{T}})^{\mathbb{S}} = -\psi_{\mathbb{T}}.$$

En reconnaissant l'action de  $\mathbb{S}$  dans nos équations on a alors :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) &= - \int_1^i \psi_{\mathbb{T}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz - \int_{-1}^i \psi_{\mathbb{T}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz \\ &\quad + 2 \int_i^{i\infty} \psi_{\mathbb{S}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz + 2 \int_0^i \psi_{\mathbb{I}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz = -\mathbf{b}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

□

**Propriété 94.** Soit  $r > \sqrt{2}$  un réel, on a alors l'identité suivante :

$$\mathbf{b}(r) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \psi_{\mathbb{I}}(z) e^{i\pi r^2 z} dz.$$

*Démonstration.* D'abord, notons que la propriété 85 assure que l'intégrale est bien définie et converge uniformément.

Notons  $\mathbf{d}(r)$  le membre de droite de l'égalité et développons le sinus avec la formule d'EULER avant de traduire les différentes intégrales, et en notant que  $\psi_{\mathbb{I}}$  est 2-périodique. Il vient :

$$\mathbf{d}(r) = \int_1^{i\infty} \psi_{\mathbb{T}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz + \int_{-1}^{i\infty} \psi_{\mathbb{T}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz - 2 \int_0^{i\infty} \psi_{\mathbb{I}}(z) e^{i\pi\|\mathbf{x}\|^2 z} dz.$$

On découpe alors chacune des intégrales avec d'une part le chemin jusqu'à  $i$ , et d'autre part le chemin de  $i$  à  $i\infty$ . Les trois premiers morceaux donnent bien les termes souhaités. Reste à étudier l'intégrale de  $i$  à  $i\infty$ . Le terme à intégrer sera  $\psi_T - \psi_I$ . Or, en utilisant que  $T$ ,  $ST^2S$  et  $STS(ST)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  sont dans  $\Gamma_0(2)$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi_T + \psi_s &= (\mathfrak{h} - \mathfrak{h}_{-2}^{|ST|})^{|T|} + (\mathfrak{h} - \mathfrak{h}_{-2}^{|ST|})^{|S|} \\ &= \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_{-2}^{|S|} + \mathfrak{h}_{-2}^{|S|} - \mathfrak{h}_{-2}^{|ST|} \\ &= \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_{-2}^{|ST|} \\ &= \psi_I \end{aligned}$$

On retrouve alors bien l'expression de  $\mathfrak{b}$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(x) &= \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{i\pi\|x\|^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{i\pi\|x\|^2 z} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \psi_I(z) e^{i\pi\|x\|^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{i\pi\|x\|^2 z} dz. \end{aligned}$$

□

**Propriété 95.** Soit  $r$  un réel positif, alors on a l'identité suivante :

$$\mathfrak{b}(r) = 4i \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} - \frac{144}{\pi r^3} + \int_0^{+\infty} (t^2 \psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right].$$

*Démonstration.* A l'aide la propriété 85, on a le développement suivant lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  :

$$\psi_I(it) = e^{2\pi t} + 144 + O(e^{-\pi t}).$$

Aussi, pour tout réel positif  $r$ , l'intégrale est bien définie et même absolument convergente. Mieux, si l'on étend la définition de cette intégrale à  $t$  complexe dans un voisinage de  $\mathbb{R}^+$ , cette intégrale définit une fonction holomorphe.

D'autre part, si  $r > \sqrt{2}$ , on peut décomposer l'intégrale par linéarité, et alors les termes correctifs se compensent exactement. Alors, on retrouve l'expression de la propriété 94 :

$$\mathfrak{b}(r) = -4 \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{i\pi r^2 z} dz.$$

L'égalité est donc vraie si  $r > \sqrt{2}$ . Mais comme les deux membres s'étendent en fonctions holomorphes sur un voisinage de  $\mathbb{R}^+$ , l'égalité s'étend à  $r$  réel positif.

□

**Propriété 96.** On a les valeurs suivantes pour la fonction  $\mathfrak{b}$  :

$$\begin{cases} \mathfrak{b}(0) = 0, \\ \mathfrak{b}(\sqrt{2}) = 0, \\ \mathfrak{b}'(\sqrt{2}) = 2i\sqrt{2}\pi. \end{cases}$$

Avec  $\mathfrak{b}'$  la dérivée de  $\mathfrak{b}$ . De plus,  $\mathfrak{b}$  est à valeurs dans  $i\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On reprend l'expression de  $\mathfrak{b}$  obtenue dans la propriété 95 :

$$\mathfrak{b}(r) = 4i \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} - \frac{144}{\pi r^3} + \int_0^{+\infty} (t^2 \psi_1(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right].$$

On fait alors les développements limités des différents termes lorsque  $r$  tend vers 0 ou  $\sqrt{2}$ . Le résultat est alors immédiat.

De plus, les coefficients de FOURIER de  $\psi_1$  sont réels d'après la propriété 85, aussi cette expression assure également que  $\mathfrak{b}$  est à valeurs dans  $i\mathbb{R}$ .  $\square$

## II. Problème de la compacité optimale.

### i) THÉORÈME DE COHN-ELKIES.

**Théorème 97** (COHN-ELKIES). *Soit  $f$  une fonction de l'espace de SCHWARTZ allant de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ , non-nulle, telle que :*

(i) *Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\|x\| \geq 1$ , on a  $f(x) \leq 0$ .*

(ii) *Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a  $\widehat{f}(x) \geq 0$ .*

*Alors la compacité optimale dans  $\mathbb{R}^d$  est majorée par*

$$\frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \text{Vol} \left( B_d \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^d \Gamma \left( \frac{d}{2} + 1 \right)},$$

où Vol désigne la mesure de LEBESGUE de  $\mathbb{R}^d$ ,  $B_d(0, \frac{1}{2})$  la boule de centre 0 et de rayons  $\frac{1}{2}$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\Gamma$  la fonction Gamma d'EULER.

**Définition 98.** Soit  $\Lambda$  un réseau, il est dit périodique s'il forme un groupe additif. On note alors  $|\Lambda|$  le volume de la cellule unité au sens de LEBESGUE, i.e. le mesure de  $\mathbb{R}^d / \Lambda$ , si  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{R}^d$ .

Si  $\Lambda$  est un réseau, son dual est défini par :

$$\Lambda^* = \{y \text{ tel que } \forall x \in \Lambda, x \cdot y \in \mathbb{Z}\}.$$

*Lemme 99* (Formule de POISSON). Soit  $\Lambda$  un réseau périodique de  $\mathbb{R}^d$  et  $\Lambda^*$  son réseau dual. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  appartenant à l'espace de SCHWARTZ, on a alors l'identité pour tout élément  $v$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x + v) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\omega \in \Lambda^*} e^{-2i\pi v \cdot \omega} \widehat{f}(\omega)$$

où  $\widehat{f}$  est la transformée de FOURIER de  $f$ .

*Démonstration.* Ce résultat vient de la décomposition en série de FOURIER du membre de gauche qui est  $\Lambda$ -périodique. Nous n'entrerons néanmoins pas plus dans ces détails.  $\square$

*Démonstration du théorème 97.* Considérons un réseau périodique  $\Lambda$  et  $N$  vecteurs  $v_1, \dots, v_N$  de sorte à ce que pour tout entiers distincts  $i$  et  $j$ ,  $v_i - v_j$  n'appartienne pas à  $\Lambda$ . On étudie alors le réseau des  $N$  vecteurs et de leurs translations par  $\Lambda$ . On suppose que la distance entre deux points distincts du réseau est toujours supérieur à 1. La compacité du réseau, quitte à la dilater, est donc

$$\frac{N}{|\Lambda|} \text{Vol} \left( B_d \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right)$$

puisqu'il y a  $N$  sommet du réseau dans la cellule unité de volume  $|\Lambda|$ .

Utilisons désormais le lemme 99 :

$$\sum_{j,k=1}^N \sum_{x \in \Lambda} f(x + v_k - v_j) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j,k=1}^N \sum_{\omega \in \Lambda^*} e^{-2i\pi(v_k - v_j) \cdot \omega} \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\omega \in \Lambda^*} \widehat{f}(\omega) \left| \sum_{j=1}^N e^{-2i\pi(v_j) \cdot \omega} \right|^2.$$

Dans le membre de droite, tous les termes sont positifs. On peut donc minorer la somme par

$$\frac{N^2}{|\Lambda|} \widehat{f}(0).$$

A gauche, notons que si  $x + v_k - v_j$  est non nul, il s'agit de la distance entre deux points distincts du réseau. Aussi, la distance est plus grande que 1. On en déduit que tous les termes pour lesquels  $i \neq j$  ou  $x \neq 0$  sont négatifs. On peut donc majorer la somme par

$$Nf(0).$$

On a donc obtenu :

$$Nf(0) \geq \frac{N^2}{|\Lambda|} \widehat{f}(0).$$

Ainsi, la compacité est majorée par

$$\frac{N}{|\Lambda|} \text{Vol} \left( B_d \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right) \leq \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)} \text{Vol} \left( B_d \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right).$$

□

## ii) THÉORÈME DE VIAZOVSKA.

**Définition 100.** On définit sur  $\mathbb{R}^8$  le réseau suivant :

$$\Lambda_8 = \left\{ (x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup \left( \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right)^8, \text{ tel que } \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0[2] \right\}.$$

*Remarque.* Notons que l'on a que deux points distincts de  $\Lambda_8$  sont à une distance plus grande que  $\sqrt{2}$ . C'est donc  $\sqrt{2}\Lambda_8$  qui est littéralement un réseau comme nous le recherchons.

En effet, si  $x = (x_i)$  et  $y = (y_i)$  appartiennent à  $\Lambda_8 \cap \mathbb{Z}^8$  et sont distincts, l'hypothèse  $\sum_{i=1}^8 x_i \equiv \sum_{i=1}^8 y_i \equiv 0[2]$  impose que soit on dispose de  $i$  tel que  $x_i$  et  $y_i$  diffèrent d'au moins 2, soit on dispose de  $i$  et  $j$  distincts tels que  $x_i$  et  $y_i$  comme  $x_j$  et  $y_j$  diffèrent d'au moins 1. En tout cas, on a

$$\|x - y\| \geq \sqrt{2}.$$

Il en va de même si  $x$  et  $y$  sont à coefficients dans  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ .

Si  $y$  n'appartient pas à  $\mathbb{Z}^8$  mais  $x$  si, tous leurs coefficients diffèrent d'au moins  $\frac{1}{2}$ . Alors

$$\|x - y\| \geq \sqrt{8 \times \frac{1}{2}} \geq \sqrt{2}.$$

**Propriété 101.** *Le réseau  $\sqrt{2}\Lambda_8$  est de compacité*

$$\frac{\pi^4}{384}.$$

*Démonstration.* Soit  $N$  un entier positif. Considérons le pavé  $[0, N]^8$ . Alors celui-ci contient  $2N^8$  éléments de  $\mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8$ . En ajoutant la contrainte sur les congruences des coefficients des éléments,  $\Lambda_8$  contient  $\frac{2N^8}{2} = N^8$  élément dans ce pavé. Aussi,  $\sqrt{2}\Lambda_8$  contient  $N^8$  éléments dans  $[0, \sqrt{2}N]^8$ . Ainsi, la compacité de  $\sqrt{2}\Lambda_8$  dans ce pavé est alors

$$\frac{N^8}{(\sqrt{2}N)^8} \text{Vol}(B_d(0, 1)) = \frac{1}{16} \text{Vol}(B_d(0, 1)) = \frac{1}{16} \frac{\pi^4}{\Gamma(5)} = \frac{\pi^4}{384}.$$

Finalement, si l'on prend une boule donc on fait tendre le rayon vers l'infini, les effets de bords disparaissent et le résultat sur un pavé se généralise. C'est donc bien la compacité du réseau.  $\square$

**Définition 102.** Définissons la fonction suivante de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$g(x) = \frac{i\pi}{8640} a(x) + \frac{i}{240\pi} b(x).$$

*Remarque.* Rappelons que  $a$  et  $b$  sont à valeurs dans l'axe des imaginaires purs (propriétés 91 et 96), si bien que  $g$  est bien à valeurs réelles.

**Théorème 103** (VIAZOVSKA). *La fonction  $g$  appartient à l'espace de SCHWARTZ. De plus :*

- (i) *Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\|x\| \geq \sqrt{2}$ , on a  $g(x) \leq 0$ .*
- (ii) *Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a  $\widehat{g}(x) \geq 0$ .*
- (iii) *On a les valeurs suivantes :  $g(0) = \widehat{g}(0) = 1$ .*

*Démonstration.*  $a$  et  $b$  appartiennent tous deux à l'espace de SCHWARTZ (propriétés 88 et 93), si bien que  $g$  aussi. De plus, toujours d'après les propriétés 88 et 93, on a la transformée de FOURIER suivante pour la fonction  $g$  :

$$\widehat{g}(x) = \frac{i\pi}{8640} a(x) - \frac{i}{240\pi} b(x).$$

Or, d'après les propriétés 91 et 96, on a  $a(0) = -8640 \frac{i}{\pi}$  et  $b(0) = 0$ . Ceci assure donc  $g(0) = \widehat{g}(0) = 1$ .

Grâce aux propriétés 89 et 94, on a pour  $r > \sqrt{2}$  les identités :

$$\begin{cases} g(r) = \frac{\pi}{2140} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} A(t) e^{-\pi r^2 t} dt, \\ \widehat{g}(r) = \frac{\pi}{2140} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} B(t) e^{-\pi r^2 t} dt. \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} A(t) = -t^2 \phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it), \\ B(t) = -t^2 \phi_0\left(\frac{i}{t}\right) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it). \end{cases}$$

De plus, notons que grâce aux propriétés 90 et 95, l'identité pour  $\widehat{g}$  tient en fait pour tout  $r > 0$ . Rappelons pour cela ce que nous avons montré :

$$\begin{aligned} a(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) & \left[ \frac{36}{\pi^3(r^2 - 2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\ & \left. + \int_0^{+\infty} \left( t^2 \phi_0\left(\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right] \end{aligned}$$

et

$$b(r) = 4i \sin^2 \left( \frac{\pi r^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} - \frac{144}{\pi r^3} + \int_0^{+\infty} (t^2 \psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right].$$

Ainsi, les termes en  $e^{2\pi t}$  de l'intégrale et ceux correspondant, en  $\frac{1}{r^2-2}$  hors de l'intégrale, se simplifient. Et comme l'intégrale de  $B(t)e^{-\pi r^2 t}$  converge uniformément si  $r > 0$ , on peut re-séparer les termes correcteurs suivants. Ce qui permet donc bien d'étendre l'identité.

Selon ce qui nous intéresse, on peut ré-écrire :

$$\begin{cases} A(t) = -t^2 \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) + \frac{36}{\pi^2} t^2 \psi_S \left( \frac{i}{t} \right) = -t^2 \phi_0(it) + \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it), \\ B(t) = -t^2 \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) - \frac{36}{\pi^2} t^2 \psi_S \left( \frac{i}{t} \right) = -t^2 \phi_0(it) + \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it). \end{cases}$$

Ainsi, en 0 comme en  $\infty$ , on connaît les coefficients des développements limités de A et B. L'idée étant qu'en allant suffisamment loin, l'approximation sera suffisante pour fixer le signe de la fonction sur un domaine assez grand. Plus précisément, on peut démontrer que l'approximation à l'ordre 6 en 0 suffit à fixer le signe sur  $]0, 1]$  tandis que celle d'ordre 6 en  $\infty$  suffit à fixer le signe sur  $[1, +\infty[$ , et ce pour les deux fonctions A et B. En calculant ces coefficients, on peut montrer A est toujours négatif et que B est toujours positif.

Cela permet alors de conclure que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\|x\| \geq \sqrt{2}$ , on a  $g(x) \leq 0$  et pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a  $\hat{g}(x) \geq 0$ . □

**Corollaire 104.** *La compacité optimale de  $\mathbb{R}^8$  est*

$$\frac{\pi^4}{384} \approx 0,25367.$$

*Démonstration.* Posons la fonction  $f(x) = g(\sqrt{2}x)$ . Le théorème 103 assure que  $f$  vérifient les hypothèses du théorème 97. Ce dernier assure donc que la compacité optimale est majorée par

$$\frac{f(0)}{\hat{f}(0)} \text{Vol} \left( B_8 \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Mais toujours grâce au théorème 103, on sait que  $f(0) = g(0) = 1$  et  $\hat{f}(0) = \sqrt{2}^{-8} \hat{g}(0) = \frac{1}{16}$ . Ainsi, la compacité optimale est majorée par

$$16 \text{Vol} \left( B_8 \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right) = 16 \frac{\pi^4}{2^8 \Gamma(5)} = \frac{\pi^4}{384}.$$

Or, cette compacité est atteinte par le réseau  $\Lambda_8$  d'après la propriété 101. C'est donc exactement la compacité optimale. □

Deuxième partie

Physique :  
Une introduction à la théorie des cordes.



## CHAPITRE

### 3

# INTRODUCTION À LA THÉORIE DES CORDES.

LA théorie des cordes s'est développée depuis les années 1970. L'idée principale de la théorie est de ne plus considérer la trajectoire dans l'espace-temps comme étant une droite plongée, *i.e.* paramétrée par  $\mathbb{R}$ , physiquement le temps. Désormais, on plonge une surface dans l'espace-temps, la corde, qui peut être paramétrée soit par  $\mathbb{R} \times S^1$  si elle est fermée, soit par  $\mathbb{R} \times [0, 1[$  si elle est ouverte. La coordonnée décrite sur l'axe réelle peut toujours être interprétée comme le temps, mais on ajoute une seconde coordonnée, qui donne à chaque temps fixé la description d'un lacet dans l'espace, ouvert ou fermé. Cette théorie, commode à quantifier, permet de retrouver le cas limite de la physique quantique. D'autre part, la théorie fait naturellement apparaître une particule sans-masse de spin 2, interprétée comme le graviton, et dont l'effet permet de retrouver la relativité générale. La théorie des cordes peut donc prétendre offrir une description plus complète, prenant en compte la physique quantique et la gravité simultanément. L'un des intérêts de ce point de vue général est de pouvoir décrire des systèmes où ni la physique quantique, ni la gravitation ne sont négligeables. Et même si c'est rarement le cas, certains systèmes, et pas des moindres, rentrent effectivement dans cette catégorie. Parmi eux, les premiers instants après le *big bang*. En effet, la relativité générale prédit une singularité, c'est cela que l'on nomme le *big bang*. Néanmoins, même si les effets quantiques sont longtemps négligeables, ils finissent par devenir prépondérant à la limite de cette singularité. La théorie du *big bang* classique est donc inconsistante, et il est nécessaire d'avoir une théorie unifiée pour décrire ce système. La théorie des cordes permet alors d'apporter des réponses à ce type de questions.

NOUS verrons néanmoins que l'on sera confronté à certaines complications. Notamment, la théorie bosonique nécessite 26 dimensions. Pourtant, en réalité, on n'en observe que 4. Comment résoudre ce paradoxe ? L'idée, initialement développée par le Oskar KLEIN<sup>1</sup> est de compactifier certaines dimensions. Celles-ci ne décrivent alors plus un espace plat mais un tore, et la quantification de ces dimensions peut, si celles-ci sont

1. Oskar KLEIN, physicien suédois (1894-1977).

suffisamment petites, rendre inaccessible les niveaux excités pour des quantités d'énergie ordinaires. Ainsi, dans la vie de tous les jours, ces dimensions ne seraient pas observables. Mais ces dimension ajoute une symétrie supplémentaire, la T-dualité. Celle-ci assure que si la dimension compacte est de longueur typique  $R$ , alors, à l'homogénéité près, on a la symétrie

$$R \longrightarrow \frac{1}{R}.$$

Cela assure entre autre qu'il est impossible d'avoir un espace de dimension nulle, il n'y a plus de singularité, et donc plus de *big bang*.

NOUS verrons aussi que l'un des intérêts de la théorie des cordes, comparée à la théorie des champs classique, est que l'énergie du vide ne diverge plus. Aussi, par rapport à la relativité générale, la courbure induite n'est plus infinie, et on peut véritablement intégrer la gravité. La limite étant que même s'il n'y a plus de divergence, la valeur obtenue est bien plus grande que la valeur observée par les astrophysiciens, avec un facteur de l'ordre de  $10^{120}$ ...

DANS ce chapitre nous introduisons les concepts de base de la théorie des cordes. Pour cela, nous nous appuyerons principalement sur les ouvrages *Basic Concepts of String Theory* de Ralph BLUMENHAGEN[5], Dieter LÜST et Stefan THEISEN, *String theory : An introduction to the bosonic string* de Joseph POLCHINSKI[6], ainsi que *String Theory in a Nutshell* d'Elias KIRITSIS[7].

## I. Théorie classique des cordes.

### i) LA PARTICULE PONCTUELLE.

On considère une particule ponctuelle dans un espace-temps de MINCOWSKI<sup>2</sup> de dimension  $d$ . On considère donc la métrique de MINCOWSKI  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$  une matrice de taille  $d \times d$ .

Dans toute la suite, les indices grecs parcourront l'ensemble  $\llbracket 0, d-1 \rrbracket$ . De plus, si  $\xi^\mu$  est un vecteur, on notera  $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu$  et  $\xi^2 = \xi^\mu \xi_\mu$ .

La particule est décrite par sa position dans l'espace-temps  $x^\mu$ , formant une droite plongée appelée ligne-univers. La dynamique est régie par un principe de moindre action, *i.e.* pour joindre les points  $s_0$  et  $s_1$  de l'espace-temps, la trajectoire minimise l'action :

$$\mathcal{S}(x^\mu) = - \int_{s_0}^{s_1} ds = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}$$

où  $ds$  est la forme-volume canonique de la droite-univers, plongée dans l'espace de MINCOWSKI, et  $\tau$  est une paramétrisation arbitraire de la ligne-univers. Pour que cela soit cohérent, il faut noter que l'action est indépendante du choix de la paramétrisation  $\tau$ .

*Justification.* Considérons  $\rho(\tau)$  une autre paramétrisation de la ligne univers. Alors :

$$- \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} \eta_{\mu\nu}} = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \frac{d\rho}{d\tau} \sqrt{-\frac{d\tau}{d\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}} = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}$$

car  $\frac{d\tau}{d\rho}$  est de signe constant pour assurer que  $\rho$  soit bien une paramétrisation. □

2. Hermann MINCOWSKI, mathématicien et physicien allemand (1864-1909).

On dispose donc d'un Lagrangien

$$\mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\tau}, \tau\right) = \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}.$$

On notera  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  pour plus de convenance. On définit ensuite le moment conjugué :

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = m \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}.$$

Une propriété importante est la relation d'EINSTEIN<sup>3</sup> :

$$p^2 + m^2 = 0.$$

*Justification.* On écrit simplement :

$$p^2 = m^2 \frac{\dot{x}^2}{-\dot{x}^2} = -m^2.$$

□

Ce type de contrainte est problématique car elle empêche de passer directement en formalisme Hamiltonien puisque l'espace des phases est contraint, ce n'est plus un espace vectoriel. Ce type de contrainte est en fait le défaut d'injectivité de la matrice  $\frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu}$ , et le nombre de contraintes de ce type, dites primaires, est la dimension du noyau de cet endomorphisme linéaire. Dans notre cas, il n'y en a qu'une, la relation d'EINSTEIN.

Pour disposer du formalisme Hamiltonien, on pose  $\phi_k$  les différentes contraintes primaires. Dans notre cas,  $\phi = p^2 + m^2$ . On pose ensuite l'Hamiltonien

$$\mathcal{H} = p^\mu \dot{x}_\mu - \mathcal{L} + \sum_k c_k \phi_k$$

où les  $c_k$  sont des multiplicateurs de LAGRANGE. On a alors défini un Hamiltonien où le défaut d'injectivité est corrigé, nous permettant de travailler sur l'espace des phases tout entier. Les multiplicateurs de LAGRANGE sont des choix de jauge qui décrivent des degrés de liberté supplémentaires. Ici, cela décrit le choix de la paramétrisation  $\tau$ .

Ici, on obtient

$$\mathcal{H} = c(p^2 + m^2).$$

Si  $f(x^\mu, p^\mu, \tau)$  est une fonction sur l'espace des phases, on a alors la relation d'évolution :

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \{f, \mathcal{H}\}_{\mathfrak{P}}$$

où  $\{f, g\}_{\mathfrak{P}} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\mu}$  désigne le crochet de POISSON.

Remarquons que  $\frac{dx^\mu}{d\tau} = \{x^\mu, \mathcal{H}\}_{\mathfrak{P}} = 2cp^\mu = 2mc \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}$ , *i.e.*

$$\dot{x}^2 = -4m^2 c^2.$$

Aussi,  $c = \frac{1}{2m}$  est le choix du temps propre, et dans ce cas :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}.$$

---

3. Albert EINSTEIN, physicien international (1879-1955).

L'action demeure néanmoins peu pratique à certains égards, du fait de la racine carrée. De plus, elle se généralise mal au cas d'une particule de masse nulle. On va donc considérer une nouvelle action, équivalente, qui sera plus simple :

$$S(x^\mu, e) = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left( \frac{\dot{x}^2}{e(\tau)} - e(\tau)m^2 \right)$$

où  $e(\tau)$  est une variable auxiliaire.

*Justification.* Les équations d'EULER-LAGRANGE sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial e} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial S}{\partial \dot{e}} \implies -\frac{\dot{x}^2}{e^2} - m^2 = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial S}{\partial \dot{x}^\mu} \implies \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^\mu}{e} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Cela impose  $e(\tau) = \frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{m}$ , si bien que l'action se réécrit

$$S(x^\mu) = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\dot{x}^2}$$

comme précédemment. La seconde équation étant la dynamique de la particule précédente. □

On a donc désormais

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{x}^2}{e(\tau)} - e(\tau)m^2 \right).$$

De plus,  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{e}$  est injective. Il n'y a donc plus de contrainte primaire. La relation d'EINSTEIN est désormais une conséquence des équations du mouvement. On parle de contrainte secondaire. Enfin, notons que l'on a conservé l'invariance par reparamétrisation. Cette invariance n'est pas manifeste mais directe au vu de l'équation donnant  $e(\tau)$ .

De surcroît, cette action se généralise au cas d'une masse nulle. On a alors  $\dot{x}^2 = 0$ , *i.e.* la particule suit une droite lumière.

## ii) ACTION DE NAMBU-GOTO.

Du point de vu des unités, on construit l'homogénéité à partir de la pente de REGGE<sup>4</sup>  $\alpha'$ . Sa dimension est une longueur au carrée. On en déduit une unité de longueur :  $l_s = 2\pi\sqrt{\alpha'}$ . Ainsi qu'une unité de masse :  $M_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$ .

On ne considère plus une droite-univers, mais une surface-univers. Elle n'est plus décrite par le temps, *i.e.*  $\mathbb{R}$ , mais par une corde, qui peut être fermée, ce sera alors  $\mathbb{R} \times S^1$  ou ouverte, ce sera alors  $\mathbb{R} \times [0, l]$ . Celle-ci est paramétrée par deux coordonnées, que l'on notera  $\sigma$  et  $\tau$ , avec  $\sigma$  appartenant à  $[0, l]$  représentant son contour et  $\tau$  appartenant  $\mathbb{R}$  sa direction générale. On notera de plus  $d\rho^\alpha = (\sigma, \tau)$ . Bien sûr, comme précédemment, le choix de ces coordonnées est arbitraire est n'aura aucune influence sur l'action. Notons néanmoins que la topologie plus complexe imposera des conditions aux bords que l'on détaillera plus loin.

Sur cette corde, on dispose toujours de coordonnées d'espace-temps  $x^\mu$  et l'espace d'arrivée, ou espace cible, de dimension  $d$ , reste régi par la métrique de MINCOWSKI. On dispose alors de l'action de NAMBU-GOTO<sup>5</sup> suivante :

$$S_{\text{NG}}(x^\mu) = -\frac{M_s}{l_s} \int_{\Sigma} dA = -\frac{M_s}{l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \sqrt{-\det \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \rho^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \rho^\beta} \eta_{\mu\nu} \right)}$$

4. Tullio REGGE, physicien italien (1931-2014).

5. Yoichiro NAMBU, physicien japonais puis américain (1921-2015) ; Tetsuo GOTO, physicien japonais (1931-1982).

où  $dA$  est la forme-volume canonique de la surface-univers plongée dans l'espace de MINCOWSKI et  $\Sigma$  la surface délimitée par  $\tau_0$  et  $\tau_1$  les temps nous intéressant.  $T = \frac{M_s}{l_s}$  est la constance de masse, la généralisation de la masse. En notant  $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}$  et  $X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ , on peut réécrire l'action sous la forme :

$$S_{\text{NG}}(x^\mu) = -\frac{M_s}{l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \sqrt{(\dot{x} \cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}.$$

On peut également noter la matrice de taille  $2 \times 2$  :

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \rho^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \rho^\beta} \eta_{\mu\nu}.$$

Il s'agit de la métrique induite sur la corde. Si  $\Gamma$  est son déterminant, l'action s'écrit :

$$S_{\text{NG}}(x^\mu) = -\frac{M_s}{l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \sqrt{-\Gamma}.$$

La négativité de  $\Gamma$  est l'assurance d'une propagation causale de l'information.

La Lagrangien est :

$$\mathcal{L}_{\text{NG}}(x_\mu, \dot{x}_\mu, \tau) = -\frac{M_s}{l_s} \sqrt{-\Gamma}.$$

Les équations du mouvement sont données par l'équation d'EULER-LAGRANGE, dans le cas particulier où  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement de  $x^\mu$  :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} = 0.$$

Il faut y ajouter les conditions au bords, pour lesquels ils faut distinguer quelques cas. Pour les cordes fermées, la condition est la périodicité :

$$x^\mu(\sigma + l, \tau) = x^\mu(\sigma, \tau).$$

Pour les cordes ouvertes, il faut, pour obtenir l'équation d'EULER-LAGRANGE,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu = 0$  sur les bords  $\sigma = 0, l$ ,  $\delta x^\mu$  étant la perturbation que l'on ajoute à notre solution extrémale. Pour ce faire, on peut demander deux types de conditions aux bords :

- (i) Les conditions limite de VON NEUMANN<sup>6</sup> :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} = 0$  en  $\sigma = 0, l$ . Physiquement, aucune impulsion n'est perdue.
- (ii) Les conditions limites de DIRICHLET :  $\delta x^\mu = 0$  en  $\sigma = 0, l$ . Physiquement, les bords de la cordes sont fixés.

On définit naturellement l'impulsion :

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{M_s}{l_s} \frac{(\dot{x} \cdot x') x'_\mu - x'^2 \dot{x}_\mu}{\sqrt{(\dot{x} \cdot x')^2 - x'^2 \dot{x}^2}}.$$

On peut également calculer que la Hessienne  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}$  a un noyau de dimension 2. Les contraintes primaires qui en découlent sont :

$$\begin{cases} \Pi \cdot x' = 0, \\ \Pi^2 + T^2 x'^2 = 0. \end{cases}$$

Et comme précédemment, l'Hamiltonien canonique est nul, et c'est donc uniquement ces deux contraintes qui contrôlent la dynamique.

6. JOHN VON NEUMANN, physicien et mathématicien hongrois puis américain (1903-1957).

### iii) ACTION DE POLYAKOV.

Comme dans le cas ponctuel, on aimerait avoir une expression de l'action sans racine carrée ni contrainte primaire. Pour cela, il faudra désormais ajouter une métrique supplémentaire de dimension  $2 \times 2$  et de signature  $(-1, +1)$ , que l'on notera  $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ . On notera  $\mathfrak{h}$  son déterminant. On définit alors l'action de POLYAKOV<sup>7</sup> par :

$$\mathcal{S}_P(x_\mu, \mathfrak{h}_{\alpha\beta}) = -\frac{M_s}{2l_s} \int_\Sigma d^2\rho \sqrt{-\mathfrak{h}} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}.$$

On a donc le Lagrangien :

$$\mathcal{L}_P(x_\mu, \dot{x}_\mu, \mathfrak{h}_{\alpha\beta}, \dot{\mathfrak{h}}_{\alpha\beta}, \tau) = -\frac{M_s}{2l_s} \sqrt{-\mathfrak{h}} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}.$$

La Hessienne  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}_P}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}$  est désormais injective, on a plus de contrainte primaire.

On définit le tenseur énergie-impulsion comme la réponse de l'action à la variation de la métrique :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\mathfrak{h}}} \frac{\delta \mathcal{L}_P}{\delta \mathfrak{h}^{\alpha\beta}}.$$

Ici on obtient donc :

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left( \Gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{h}^{\gamma\delta} \Gamma_{\gamma\delta} \right) = -\frac{1}{\alpha'} \left( \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu - \frac{1}{2} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{h}^{\gamma\delta} \partial_\gamma x^\mu \partial_\delta x_\mu \right).$$

Notons que l'on aura  $T_{\alpha\beta}^\alpha = T_{\alpha\beta} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} = 0$ . Cette propriété peut également se déduire des symétries de l'action de POLYAKOV comme nous le verrons plus tard.

Les équations d'EULER-LAGRANGE s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\alpha\beta} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{h}}} \partial_\alpha (\sqrt{-\mathfrak{h}} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} \partial_\beta x^\mu) = 0. \end{array} \right.$$

Il faut de plus ajouter les conditions limites comme précédemment.

Notons que la nullité du tenseur énergie-impulsion assure que

$$\Gamma = \frac{1}{4} \mathfrak{h} (\mathfrak{h}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta})^2.$$

Ceci, en l'injectant dans l'action de POLYAKOV, redonne l'action de NAMBU-GOTO. On a donc bien équivalence entre les actions.

Un autre point de vu est de constater que  $\mathfrak{h}^{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}$  est une matrice symétrique. Or, si  $A$  est une matrice symétrique, on a  $\text{Tr}(A)^2 \geq 4 \det(A)^2$ , avec égalité ssi  $A$  est une matrice scalaire. Cette inégalité fournit  $\mathcal{S}_P \geq \mathcal{S}_{\text{NG}}$ , et le cas d'égalité est  $T_{\alpha\beta} = 0$ .

On pourrait également se demander s'il était possible d'ajouter des termes à  $\mathcal{S}_P$  conservant l'invariance par reparamétrisation et les symétries de l'espace de MINCOWSKI. Il se trouve que oui, deux types de termes peuvent être ajoutés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_1 = \lambda_1 \int_\Sigma d^2\rho \sqrt{-\mathfrak{h}} \\ \mathcal{S}_2 = \lambda_2 \int_\Sigma d^2\rho \sqrt{-\mathfrak{h}} R \end{array} \right.$$

où  $R$  est la courbure de GAUSS<sup>8</sup>. Le premier terme, dit cosmologique, est nécessairement nul. En effet, l'équation d'EULER-LAGRANGE donnerait alors  $T_{\alpha\beta} = -\lambda_1 \frac{1}{2M_s} \mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ . Mais  $T_{\alpha\beta}$  est de trace nulle, d'où

7. Alexander Markovich POLYAKOV, physicien russe (1945-).

8. Carl Friedrich GAUSS, mathématicien et physicien allemand (1777-1855).

$\lambda_1 \mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} = 0$ , *i.e.*  $\lambda_1 = 0$ . Le second terme, tout intégré, n'influencera pas la dynamique. Néanmoins, on peut noter que par le théorème de GAUSS-BONNET<sup>9</sup>, on a l'identité

$$\mathfrak{S}_2 = \lambda_2 \chi(\Sigma)$$

où  $\chi$  désigne la caractéristique d'EULER. Ce terme a donc un intérêt topologique.

#### iv) SYMÉTRIES DE L'ACTION ET JAUGE CONFORME.

Avec l'action de POLYAKOV, on dispose de trois grands types de symétries :

- (i) L'invariance de POINCARÉ : il s'agit des changements de référentiels galiléens de l'espace-temps de MINCOWSKI. Ils s'écrivent de façon infinitésimales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x^\mu = \mathbf{a}^\mu{}_\nu x^\nu + \mathbf{b}^\mu \quad \text{avec } \mathbf{a}_{\mu,\nu} \in M(d, \mathbb{R}), \mathbf{a}_{\mu\nu} = -\mathbf{a}_{\nu\mu} \text{ et } \mathbf{b}^\mu \in \mathbb{R}^d, \\ \delta \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 0. \end{array} \right.$$

- (ii) L'invariance par reparamétrisation : il s'agit du choix arbitraire des coordonnées  $\sigma, \tau$ . De façon infinitésimale, ces symétries s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x^\mu = -\xi^\alpha \partial_\alpha x^\mu \\ \delta \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = -(\xi^\gamma \partial_\gamma \mathfrak{h}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma \mathfrak{h}_{\gamma\beta} + \partial_\beta \xi^\gamma \mathfrak{h}_{\alpha\gamma}) = -(\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha). \end{array} \right. \quad \text{avec } \xi^\alpha(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

Notons que l'on a alors :  $\delta \sqrt{-\mathfrak{h}} = -\partial_\alpha (\xi^\alpha \sqrt{-\mathfrak{h}})$

- (iii) L'invariance de WEYL<sup>10</sup> : il s'agit d'une invariance d'échelle pour la métrique  $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ . De façon infinitésimale, cette invariance s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x^\mu = 0, \\ \delta \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2\Lambda \mathfrak{h}_{\alpha\beta} \quad \text{avec } \Lambda(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

L'une des conséquences de l'invariance de WEYL est la nullité de la trace du tenseur énergie impulsion. En effet, sous une telle transformation, on a :

$$0 = \delta \mathfrak{S}_p = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2 \rho \sqrt{-\mathfrak{h}} T_{\alpha\beta} \delta \mathfrak{h}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2 \rho \sqrt{-\mathfrak{h}} T^\alpha{}_\alpha e^{-2\Lambda}.$$

De plus, l'invariance par reparamétrisation donne que  $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ . C'est physiquement la conservation du moment et de l'impulsion.

On va maintenant utiliser ces invariances pour choisir une jauge dans laquelle  $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$  est plus agréable. Comme c'est une forme quadratique de signature  $(-1, +1)$ , on a en chaque point de la corde deux vecteurs isotropes. Cela donne localement des coordonnées associées  $\rho^+$  et  $\rho^-$ , appelées cône-lumière, ou coordonnées conformes. Dans cette base,  $\mathfrak{h}_{++} = \mathfrak{h}_{--} = 0$ . Et la métrique associées s'écrit  $ds^2 = -\Omega^2 d\rho^+ d\rho^-$ . On pose alors  $\sigma$  et  $\tau$  de sorte que :

$$\rho^\pm = \tau \pm \sigma.$$

On a alors  $ds^2 = \Omega^2 (-d\tau^2 + d\sigma^2)$ . On utilise alors l'invariance de WEYL pour choisir  $\Omega = 1$ . Et dans cette jauge, appelée jauge conforme, on a alors

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

9. Pierre-Ossian BONNET, mathématicien français, polytechnicien (1819-1892).

10. Hermann WEYL, mathématicien et physicien allemand puis américain (1885-1955).

Notons que l'on a ici démontré l'existence de cette jauge de façon locale. Néanmoins, ce résultat se généralise de façon globale. Dans la base des coordonnées conformes, on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{h}_{+-} = \mathfrak{h}_{-+} = -\frac{1}{2}, & \mathfrak{h}^{+-} = \mathfrak{h}^{-+} = -2, \\ \mathfrak{h}_{++} = \mathfrak{h}_{--} = \mathfrak{h}^{++} = \mathfrak{h}^{--} = 0, & \\ \partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}), & \\ \xi^{+} = -2\xi_{-}, & \xi^{-} = -2\xi_{+}. \end{array} \right.$$

La jauge conforme ne fixe néanmoins pas tout. En effet, certaines reparamétrisations demeurent possibles. Il s'agit de celles qui sont de la forme :

$$\rho'^{\pm} = f^{\pm}(\rho^{\pm}).$$

Réécrivons l'action de POLYAKOV dans cette jauge particulière :

$$S_P = -\frac{M_s}{2l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} x^{\mu} \partial_{\beta} x^{\mu} = \frac{M_s}{2l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho (\dot{x}^2 - x'^2) = \frac{2M_s}{l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \partial_{+} x \cdot \partial_{-} x.$$

Si l'on perturbe  $x^{\mu}$ , la variation de l'action s'écrit, après une intégration par partie :

$$\delta S_P = \frac{M_s}{l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \delta x^{\mu} (\partial_{\sigma}^2 - \partial_{\tau}^2) x_{\mu} - \frac{M_s}{l_s} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau [\delta x^{\mu} x'_{\mu}]_{\sigma=0}^{\sigma=l}.$$

On impose comme précédemment les conditions aux limites. Pour les cordes fermées, la condition est la périodicité :

$$x^{\mu}(\sigma + l, \tau) = x^{\mu}(\sigma, \tau).$$

Pour les cordes ouvertes, on peut demander deux types de conditions aux bords :

- (i) Les conditions limite de VON NEUMANN :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^{\mu}} = 0$  en  $\sigma = 0, l$ . Physiquement, aucune impulsion n'est perdue.
- (ii) Les conditions limites de DIRICHLET :  $\delta x^{\mu} = 0$  en  $\sigma = 0, l$ . Physiquement, les bords de la cordes sont fixés.

Ceci assure que le second terme de l'équation est nul. On obtient finalement l'équation de la dynamique suivante :

$$(\partial_{\sigma}^2 - \partial_{\tau}^2) x_{\mu} = 0.$$

On reconnaît une équation d'onde unidimensionnelle. Les solutions générales s'écrivent alors :

$$x^{\mu}(\sigma, \tau) = x_L^{\mu}(\rho^{+}) + x_R^{\mu}(\rho^{-}).$$

D'autre part, on dispose toujours de l'équation sur  $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$  nous assurant

$$T_{\alpha\beta} = 0.$$

On a désormais les composantes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{01} = T_{10} = -2\pi \frac{M_s}{l_s} (\dot{x} \cdot x'), \\ T_{00} = T_{11} = -\pi \frac{M_s}{l_s} (\dot{x}^2 + x'^2). \end{array} \right.$$

On peut donc écrire ces conditions, nommées contraintes de VIRASORO<sup>11</sup>, sous la forme :

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0.$$

11. Miguel Ángel VIRASORO, physicien argentin (1940-).



Dans les coordonnées de jauge, on peut encore les écrire :

$$(\partial_{\pm}x)^2 = 0.$$

Ou encore :

$$\dot{x}_R^2 = \dot{x}_L^2 = 0.$$

L'impulsion est toujours

$$\Pi^{\mu} = \frac{M_s}{l_s} \dot{x}^{\mu}.$$

L'Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}_P = \int_0^l d\sigma (\dot{x} \cdot \Pi - \mathcal{L}_P) = \frac{M_s}{2l_s} \int_0^l d\sigma (\dot{x}^2 + x'^2) = \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma ((\partial_+ x)^2 + (\partial_- x)^2).$$

On a également 2 grandeurs conservées grâce aux symétries du système. L'invariance de POINCARÉ nous en fournit deux par le théorème de NOETHER<sup>12</sup>. L'impulsion totale :

$$P_{\mu} = \int_0^l d\sigma \Pi_{\mu} = \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma \dot{x}_{\mu}(\sigma).$$

Ainsi que moment cinétique total :

$$J_{\mu\nu} = \int_0^l d\sigma (x_{\mu} \Pi_{\nu} - x_{\nu} \Pi_{\mu}) = \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma (x_{\mu} \dot{x}_{\nu} - x_{\nu} \dot{x}_{\mu}).$$

Néanmoins, ces grandeurs ne sont conservées que pour les cordes fermées ou les cordes ouvertes avec les conditions au bord de VON NEUMANN. En effet, les conditions limites de DIRICHLET brisent la symétrie de POINCARÉ et donc les grandeurs conservées associées par le théorème de NOETHER.

*Justification.* Dérivons :

$$\frac{dP_{\mu}}{d\tau} = \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma \partial_{\tau}^2 x_{\mu} = \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma \partial_{\sigma}^2 x_{\mu} = \frac{M_s}{l_s} [\partial_{\sigma} x_{\mu}]_{\sigma=0}^{\sigma=l}.$$

On applique ensuite les conditions aux limites. Cela se passe de même pour le moment cinétique total.  $\square$

## II. Quantification de la corde bosonique.

### i) DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES D'OSCILLATEURS.

**Cordes fermées.** Rappelons que l'on a une équation d'onde. Aussi, la solution générale s'écrit :

$$x^{\mu}(\sigma, \tau) = x_L^{\mu}(\tau + \sigma) + x_R^{\mu}(\tau - \sigma).$$

La périodicité assure

$$x^{\mu}(\sigma + l, \tau) = x^{\mu}(\sigma, \tau).$$

En dérivant par rapport à  $\sigma$  ou  $\tau$  cette expression puis en comparant les résultats, on obtient :

$$\begin{cases} x_L'^{\mu}(\tau + \sigma + l) = x_L'^{\mu}(\tau + \sigma), \\ x_R'^{\mu}(\tau + \sigma + l) = x_R'^{\mu}(\tau + \sigma). \end{cases}$$

12. Emmy NOETHER, mathématicienne et physicienne allemande (1882-1935).

On a donc la périodicité des dérivés de  $x_L^\mu$  et  $x_R^\mu$ . La valeur moyenne de  $x_L^\mu$ , pour n'importe quel  $\tau$ , est  $\frac{1}{l} \int_0^l d\sigma x_L^\mu(\sigma + \tau) = \frac{1}{l} \int_0^l d\sigma \partial_+ x^\mu(\sigma, \tau)$ . Or, par périodicité de  $x^\mu$ ,  $x_L^\mu$  et  $x_R^\mu$  ont la même valeur moyenne. Celle-ci s'écrit alors

$$\frac{1}{2l} \int_0^l d\sigma (\partial_+ + \partial_-) x^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2l} \int_0^l d\sigma \partial_\tau x^\mu(\sigma, \tau) = \frac{l_s}{2lM_s} P^\mu.$$

On reconnaît donc l'impulsion totale de la corde. On peut alors écrire un développement en série de FOURIER sous cette forme :

$$\begin{cases} x_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2} X^\mu + \frac{l_s}{2lM_s} (\tau + \sigma) P^\mu + i \frac{l_s}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-2i\pi \frac{k}{l} (\tau + \sigma)}, \\ x_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2} X^\mu + \frac{l_s}{2lM_s} (\tau - \sigma) P^\mu + i \frac{l_s}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-2i\pi \frac{k}{l} (\tau - \sigma)}. \end{cases}$$

Avec  $\alpha_k$ ,  $\bar{\alpha}_k$ ,  $X^\mu$  des constantes. Le fait que l'on décrive des fonctions réelles impose

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* \text{ et } \bar{\alpha}_{-n}^\mu = (\bar{\alpha}_n^\mu)^*$$

où  $z^*$  désigne le conjugué du complexe  $z$ . De même,  $X^\mu$  est réel. Déterminons la position moyenne de la corde :

$$\frac{1}{l} \int_0^l d\sigma x^\mu = X^\mu + \frac{l_s}{M_s} P^\mu \tau.$$

Ainsi,  $X^\mu$  est la position moyenne de la corde à  $\tau = 0$ , et cette moyenne se place dans le temps en suivant l'impulsion moyenne constante. On pose  $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \frac{P^\mu}{2M_s}$ .

L'Hamiltonien se réécrit alors :

$$\mathcal{H}_P = \frac{2\pi}{l} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n).$$

*Justification.* On écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P &= \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma ((\partial_+ x)^2 + (\partial_- x)^2) \\ &= \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma \left( \left( \frac{l_s}{2lM_s} P^\mu + \frac{l_s}{l} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \alpha_k^\mu e^{-2i\pi \frac{k}{l} (\tau + \sigma)} \right)^2 + \left( \frac{l_s}{2lM_s} P^\mu + \frac{l_s}{l} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \bar{\alpha}_k^\mu e^{-2i\pi \frac{k}{l} (\tau - \sigma)} \right)^2 \right) \\ &= \frac{M_s l_s}{l^2} \int_0^l d\sigma \left( \sum_{k, n \in \mathbb{Z}} \alpha_k \cdot \alpha_n e^{-2i\pi \frac{k+n}{l} (\tau + \sigma)} + \sum_{k, n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_k \cdot \bar{\alpha}_n e^{-2i\pi \frac{k+n}{l} (\tau - \sigma)} \right) \\ &= \frac{2\pi}{l} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n). \end{aligned}$$

□

**Cordes ouvertes avec conditions limites de VON NEUMAN.** Tout se passe de façon analogue avec les nouvelles conditions limites. On obtient alors :

$$x^\mu(\tau + \sigma) = X^\mu + \frac{l_s}{lM_s} \tau P^\mu + i \frac{l_s}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-2i\pi \frac{k}{l} \tau} \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right).$$

En posant  $\alpha_0^\mu = \frac{P^\mu}{M_s}$ , on peut écrire l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}_P = \frac{\pi}{l} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n.$$

**Cordes ouvertes avec conditions limites de DIRICHLET.** Les calculs se passent de façon analogue avec les nouvelles conditions limites. Le centre de l'impulsion est ici nul, mais les bords, fixes avec ces conditions limites, notés  $x_0^\mu$  et  $x_1^\mu$  jouent un rôle. On obtient alors :

$$x^\mu(\tau + \sigma) = x_0^\mu + \frac{x_1^\mu - x_0^\mu}{l} \sigma + i \frac{l_s}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-2i\pi \frac{k}{l} \tau} \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right).$$

On peut écrire l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}_P = \frac{M_s}{2ll_s} (x_1^\mu - x_0^\mu)^2 + \frac{\pi}{l} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n.$$

On préférera alors poser  $\alpha_0 = \sqrt{\frac{M_s}{2\pi l_s}} (x_1^\mu - x_0^\mu)$ . De plus, le centre de masse est désormais :

$$X^\mu = \frac{x_0^\mu + x_1^\mu}{2}.$$

Notons qu'il est aussi imaginable de demander des conditions limites mixtes pour les cordes ouvertes, ce qui donne des résultats intermédiaires.

## ii) COMMUTATIVITÉ ET CONTRAINTES DE VIRASORO.

On a justifié précédemment qu'en plus de la dynamique du mouvement, il faut considérer les contraintes de VIRASORO, que l'on peut exprimer :

$$(\partial_\pm x)^2 = 0.$$

On considère alors les coefficients de FOURIER de ces fonctions, que l'on nomme opérateurs de VIRASORO :

$$\begin{cases} L_m(\tau) = \frac{lM_s}{2\pi l_s} \int_0^l d\sigma (\partial_- x^\mu)^2 e^{-2i\pi \frac{m}{l} (\tau - \sigma)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-n} \alpha_n, \\ \bar{L}_m(\tau) = \frac{lM_s}{2\pi l_s} \int_0^l d\sigma (\partial_+ x^\mu)^2 e^{2i\pi \frac{m}{l} (\tau + \sigma)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{m-n} \bar{\alpha}_n. \end{cases}$$

Les contraintes de VIRASORO sont donc la nullité de  $L_m$  et  $\bar{L}_m$  pour tout entier  $m$ .

Puisque l'on veut des résultats réels, cela impose :  $L_{-n} = L_n^*$  et  $\bar{L}_{-n} = \bar{L}_n^*$ . Notons que dans le cas des cordes ouvertes,  $L_m = \bar{L}_m$ . Dans tous les cas, on a simplement :

$$\mathcal{H}_P = L_0 + \bar{L}_0.$$

Concernant les commutativités, on a toujours :

$$\begin{cases} \{x^\mu(\sigma, \tau), x^\nu(\sigma', \tau)\}_{\mathfrak{P}} = 0, \\ \{x^\mu(\sigma, \tau), \dot{x}^\nu(\sigma', \tau)\}_{\mathfrak{P}} = \frac{l_s}{M_s} \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}, \\ \{\dot{x}^\mu(\sigma, \tau), \dot{x}^\nu(\sigma', \tau)\}_{\mathfrak{P}} = 0. \end{cases}$$

Il est possible d'en déduire les relations de commutation suivantes :

$$\begin{cases} \{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\}_{\mathfrak{P}} = \{\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\}_{\mathfrak{P}} = -i \frac{m}{2} \delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu}, \\ \{\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\}_{\mathfrak{P}} = 0 \\ \{X^\mu, P^\nu\}_{\mathfrak{P}} = \eta^{\mu\nu}. \end{cases} \quad \text{dans le cas des cordes fermées,}$$

Ainsi que celles-ci, générant ce que l'on appelle l'algèbre de VIRASORO ou de WITT<sup>13</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{L_m, L_n\}_{\mathfrak{P}} = -i(m-n)L_{m+n}, \\ \{L_m, \bar{L}_n\}_{\mathfrak{P}} = 0 \\ \{\bar{L}_m, \bar{L}_n\}_{\mathfrak{P}} = -i(m-n)\bar{L}_{m+n}. \end{array} \right. \quad \text{dans le cas des cordes fermées,}$$

### iii) QUANTIFICATION CANONIQUE.

On passe désormais en physique quantique. Les scalaires  $\chi^\mu(\sigma, \tau)$  deviennent des opérateurs dans un espace de HILBERT<sup>14</sup>. Par conséquent,  $X^\mu$ ,  $P^\mu$  et les  $\alpha_k^\mu$  et  $L_m$  deviennent également des opérateurs. Les opérateurs seront notés avec des chapeaux. Les crochets de POISSON deviennent des commutateurs :

$$\{, \}_{\mathfrak{P}} \longrightarrow -i[, ].$$

La condition de réalité devient une condition d'hermiticité. Aussi par exemple, on a  $(\hat{\alpha}_m^\mu)^\dagger = \hat{\alpha}_{-m}^\mu$ .

Posons  $\hat{\alpha}_m^\mu = \sqrt{\frac{2}{|m|}} \hat{\alpha}_m^\mu$  si  $m \neq 0$ . Ainsi, on a la relation de commutation naturelle pour  $m, n > 0$  :

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, (\hat{\alpha}_n^\nu)^\dagger] = \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}.$$

L'état fondamental est celui qui est annulé par tous les opérateurs annihilation  $\hat{\alpha}_m^\mu$  pour  $m \in \mathbb{N}^*$ . De plus, il faut spécifier l'état dans l'espace de  $\hat{X}^\mu, \hat{P}^\mu$ . Aussi, l'état fondamental s'écrira  $|0, P^\mu\rangle$  et vérifiera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \mathbb{N}^*, \hat{\alpha}_m^\mu |0, P^\mu\rangle = 0, \\ \hat{P}^\mu |0, P^\mu\rangle = P^\mu. \end{array} \right.$$

On doit néanmoins faire face à une complication :  $\eta^{00} = -1$ . Aussi, on a :

$$|\hat{\alpha}_{-m}^0 |0, P^\mu\rangle|^2 = \langle 0, P^\mu | \hat{\alpha}_m^0 \hat{\alpha}_{-m}^0 |0, P^\mu\rangle = -m \langle 0, P^\mu | 0, P^\mu\rangle < 0$$

si  $m > 0$ . Cela est véritablement problématique car empêche l'interprétation probabiliste de la norme de la fonction d'onde. Ces états problématiques sont dits fantômes. Afin de résoudre ce paradoxe, il faut se souvenir qu'il y avait toujours des contraintes à imposer à notre système. Il faut donc espérer que ces contraintes rendent inaccessibles ces états fantômes. Et il se trouve que dans le bon modèle, c'est le cas.

Un autre problème se pose lorsque l'on passe en physique quantique. Il s'agit de définir correctement les opérateurs qui classiquement faisaient apparaître des produits ne commutant plus. Il faut aussi choisir l'ordre de façon cohérente, afin d'avoir des valeurs propres finies. Pour comparer les opérateurs création et annihilation, on utilise l'ordre *normal*, *i.e.* on place les opérateurs avec les modes les plus bas à gauche. Dans le cas de  $L_0$ , on l'écrit en quantique sous la forme :

$$\hat{L}_0 = \hat{\alpha}_0^2 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \hat{\alpha}_{-m} \hat{\alpha}_m.$$

L'ordre choisi permet d'avoir des valeurs propres finies. Commuter certains oscillateurs revient à ajouter une constante. Une constante finie demeure raisonnable, c'est pourquoi on va ajouter  $A$ , afin de prendre en compte le défaut de commutation.

$$\hat{L}_0 \longrightarrow \hat{L}_0 + A.$$

13. Ernst WITT, mathématicien allemand (1911-1991).

14. David HILBERT, mathématicien allemand (1862-1943).

Si  $n \neq 0$ , il n'y a pas d'ambiguïté pour définir  $\widehat{L}_n$  puisque les produits en question commutent.

En classique, les contraintes de VIRASORO sont que pour tout  $n$ ,  $L_n$  soit nul. En quantique, on demande alors que pour tout état physique  $|x\rangle$ , on ait :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{L}_n |x\rangle = 0.$$

Il est utile de connaître l'algèbre générée par les opérateurs de VIRASORO. Néanmoins, le calcul présente des subtilités d'ordre d'opérateurs, si bien que l'on l'admettra :

$$[\widehat{L}_m, \widehat{L}_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{d}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n}.$$

#### iv) QUANTIFICATION DANS LE CÔNE-LUMIÈRE.

On considère les coordonnées  $(x^\pm, x^i)$  où  $i \in [2, d - 1]$  et

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1).$$

Les  $x^i$  sont dites coordonnées transverses. On peut de plus, tout en restant dans la jauge conforme, choisir les coordonnées  $\tau, \sigma$  de sorte que

$$x^+ = X^+ + \frac{l_s}{lM_s} P^+ \tau.$$

C'est possible car  $x^+$  vérifie alors bien l'équation d'onde unidimensionnelle. Dans cette jauge, le produit scalaire s'écrit alors :

$$\xi \cdot \eta = \xi^i \eta_i - \xi^+ \eta^- - \xi^- \eta^+.$$

L'intérêt de cette jauge est que la contrainte de VIRASORO, qui peut s'écrire  $(\dot{x} \pm x')^2$  assure que l'on peut résoudre en  $x^-$  à l'aide des  $x^i$ . Aussi, les contraintes reviennent presque à éliminer  $x^\pm$ . On peut alors réaliser les développements en oscillateurs sous ces contraintes. On a simplement :

$$\alpha_n^+ = \bar{\alpha}_n^+ = \frac{1}{2M_s} P^+ \delta_{n,0}.$$

D'autre part l'action se réécrit :

$$S_P = \frac{M_s}{2l_s} \int_\Sigma d^2\rho ((\dot{x}^i)^2 - (x'^i)^2) - \frac{M_s}{l_s} \int_\Sigma d^2\rho \frac{l_s}{lM_s} P^+ \dot{x}^- = \frac{M_s}{2l_s} \int_\Sigma d^2\rho ((\dot{x}^i)^2 - (x'^i)^2) - \int d\tau P^+ \dot{X}^-$$

où  $X^- = \frac{1}{l} \int_0^l d\sigma x^-$ . Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}_P = \frac{M_s}{2l_s} \int_0^l d\sigma ((\dot{x}^i)^2 - (x'^i)^2) - P^+ \dot{X}^-.$$

Les moments s'écrivent alors :

$$\left| \begin{array}{l} P^- = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^-} = -P^+, \\ \int_0^l d\sigma \Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{x}^i} = \frac{M_s}{l_s} \int_0^l d\sigma \dot{x}^i. \end{array} \right.$$

L'Hamiltonien canonique devient alors :

$$\mathcal{H}_{PC} = \frac{M_s}{2l_s} \int_0^l d\sigma ((\dot{x}^i)^2 + (x'^i)^2).$$

Mais on a de plus les contraintes  $(\dot{x} \pm x')^2$ , qui permettent d'exprimer :

$$\partial_\tau x^- = (\partial_+ + \partial_-)x^- = \frac{lM_s}{l_s P^+} ((\dot{x}^i)^2 + (x'^i)^2).$$

Et comme  $P^\mu = \frac{M_s}{l_s} \int d\sigma \dot{x}^\mu$ , on a :

$$P^- = \frac{lM_s}{l_s P^+} \mathcal{H}_{PC}.$$

D'autre part, la soustraction des deux contraintes assure que  $\dot{x}^i x'_i$  est proportionnel à  $x'^-$ . Pour les cordes fermées, par périodicité, on a donc :

$$\int_0^l d\sigma \dot{x}^i x'_i = 0.$$

On passe désormais en physique quantique. Les opérateurs d'intérêt sont maintenant  $P^-$ ,  $X^-$ ,  $x^i$  et  $\Pi^i$ . On demande les relations de commutations suivantes, en s'appuyant sur ce qui précède :

$$\begin{aligned} [\hat{X}^-, \hat{P}^+] &= -i, \\ [\hat{X}^i, \hat{P}^j] &= i\delta_{ij}, \\ [\hat{\alpha}_n^i, \hat{\alpha}_m^j] &= \frac{n}{2} \delta^{ij} \delta_{n+m,0}, \\ [\hat{\tilde{\alpha}}_n^i, \hat{\tilde{\alpha}}_m^j] &= \frac{n}{2} \delta^{ij} \delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad \text{pour les cordes fermées.}$$

On peut donc réécrire l'Hamiltonien en termes d'oscillateurs quantiques. Néanmoins comme précédemment, on ajoutera une constante liées à l'ordre en plus de l'ordre *normal*. Pour les cordes fermées :

$$\hat{\mathcal{H}}_{PC} = \frac{4\pi}{l} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^i \hat{\tilde{\alpha}}_n^i) + A + \bar{A} \right) + \frac{l_s}{2lM_s} \hat{p}^i \hat{p}^i.$$

Et pour les cordes ouvertes, en notant  $\mathcal{N} = \{i \in \llbracket 2, d-1 \rrbracket\}$ , la condition limite selon  $i$  est de VON NEUMANN.} et  $\mathcal{D} = \{i \in \llbracket 2, d-1 \rrbracket\}$ , la condition limite selon  $i$  est de DIRICHLET.}, on écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{PC} = \frac{2\pi}{l} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + A \right) + \frac{l_s}{lM_s} \sum_{i \in \mathcal{N}} \hat{p}^i \hat{p}^i + \frac{M_s}{2ll_s} \sum_{i \in \mathcal{D}} (\hat{x}_1^i - \hat{x}_0^i)^2.$$

Reste à voir qui sont les constantes  $A, \bar{A}$ . Ils viennent du défaut du commutation :

$$\sum_{n \neq 0} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2} = 2 \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2} \right).$$

La terme d'erreur est divergent. Il faut donc le régulariser. Pour cela, on peut utiliser la fonction  $\zeta$  de RIEMANN, qui donne le terme non-divergent de cette somme :  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . D'où

$$A = \bar{A} = -\frac{d-2}{48}.$$

En fait, on peut justifier ce résultat plus physiquement en ajoutant une coupure. En réalise alors que le terme principal, celui qui diverge, peut être intégralement compenser en ajoutant un terme cosmologique correspondant dans l'action de POLYAKOV. Ce terme n'a aucune conséquence sur le mouvement, mais il

permet de corriger cette divergence. Or, physiquement, le résultat se doit d'être fini, on en déduit que l'action doit contenir le terme correspondant. L'erreur de commutation se restreint alors à l'ordre suivant, fini, que l'on vient de déterminer. On a donc pour les cordes fermées :

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{PC}} = \frac{4\pi}{l} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \widehat{\alpha}_{-n}^i \widehat{\alpha}_n^i + \widehat{\alpha}_{-n}^i \widehat{\alpha}_n^i \right) + \frac{l_s}{2lM_s} \widehat{p}^i \widehat{p}^i - \frac{(d-2)\pi}{6l}.$$

Et pour les cordes ouvertes :

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{PC}} = \frac{2\pi}{l} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \widehat{\alpha}_{-n}^i \widehat{\alpha}_n^i + \frac{l_s}{lM_s} \sum_{i \in \mathcal{N}} \widehat{p}^i \widehat{p}^i + \frac{M_s}{2l_s} \sum_{i \in \mathcal{D}} (\widehat{x}_1^i - \widehat{x}_0^i)^2 - \frac{(d-2)\pi}{24l}.$$

Introduisons, par analogie avec le cas classique, l'opérateur de masse :

$$\widehat{m}^2 = 2\widehat{P}^+ \widehat{P}^- - \widehat{P}^i \widehat{P}_i.$$

Mais rappelons que l'on a montré  $\widehat{P}^- \widehat{P}^+ = \frac{lM_s}{l_s} \widehat{\mathcal{H}}_{\text{PC}}$ . Pour la corde fermée, on a donc :

$$\widehat{m}^2 = \frac{4\pi M_s}{l_s} \left( \widehat{N}_{\text{tr}} + \widehat{\bar{N}}_{\text{tr}} - \frac{d-2}{12} \right)$$

où  $\widehat{N}_{\text{tr}} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \widehat{\alpha}_{-n}^i \widehat{\alpha}_n^i$  et  $\widehat{\bar{N}}_{\text{tr}} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \widehat{\bar{\alpha}}_{-n}^i \widehat{\bar{\alpha}}_n^i$ . De plus, la contrainte  $\int_0^l d\sigma \dot{x}^i x_i' = 0$  impose

$$N_{\text{tr}} = \bar{N}_{\text{tr}}.$$

D'où :

$$\widehat{m}^2 = 2M_s^2 \left( \widehat{N}_{\text{tr}} - \frac{d-2}{24} \right).$$

De façon analogue, pour les cordes ouvertes :

$$\widehat{m}^2 = M_s^2 \left( \widehat{N}_{\text{tr}} + \frac{1}{l_s^2} \sum_{i \in \mathcal{D}} (\widehat{x}_1^i - \widehat{x}_0^i)^2 - \frac{d-2}{24} \right).$$

## v) SPECTRE DE LA CORDE BOSONIQUE.

Si l'on considère une particule massive dans l'espace de MINCOWSKI, on dispose d'un référentiel dans lequel  $P^\mu = (\mathbf{m}, 0, \dots, 0)$ , avec  $P^2 = -\mathbf{m}^2$ . Un tel vecteur possède, dans le groupe de POINCARÉ un stabilisateur qui est  $\text{SO}(d-1)$ . Pour une particule sans masse, la situation est différente. En effet, on a toujours  $P^2 = 0$ , et donc on ne peut atteindre le même référentiel que précédemment. En revanche, on peut choisir pour référentiel  $P^\mu = (E, E, 0, \dots, 0)$ . Le stabilisateur, noté  $E(d-2)$  est de dimension  $d-2$ . Il est donc plus petit.

**Corde fermée.** Le niveau fondamental est  $|0, P^\mu\rangle$ . Si on lui applique l'opérateur de masse, on obtient :

$$\widehat{m}^2 |0, P^\mu\rangle = -M_s^2 \frac{d-2}{12} |0, P^\mu\rangle.$$

Notons que la masse est de carré négatif... Il s'agit d'un état instable, appelé tachyon.

Les premiers états excités sont ensuite de la forme

$$\widehat{\alpha}_{-1}^i \widehat{\alpha}_{-1}^j |0, \mathbf{P}^\mu\rangle = \left( \widehat{\alpha}_{-1}^{(i} \widehat{\alpha}_{-1}^{j)} - \frac{1}{d-2} \delta^{ij} \widehat{\alpha}_{-1}^k \widehat{\alpha}_{-1}^k \right) |0, \mathbf{P}^\mu\rangle + \widehat{\alpha}_{-1}^{[i} \widehat{\alpha}_{-1}^{j]} |0, \mathbf{P}^\mu\rangle + \frac{1}{d-2} \delta^{ij} \widehat{\alpha}_{-1}^k \widehat{\alpha}_{-1}^k |0, \mathbf{P}^\mu\rangle$$

où les indices entre parenthèses sont symétrisés et ceux entre crochets antisymétrisés. Le premier terme est symétrique, identifié comme étant le graviton, le second est antisymétrique est le dernier est symétrique, identifié comme étant le dilaton. Cet état excité ne dispose pas de la symétrie de  $SO(d-1)$  et doit par conséquent être de masse nulle. On a :

$$0 = \widehat{m}^2 \widehat{\alpha}_{-1}^i \widehat{\alpha}_{-1}^j |0, \mathbf{P}^\mu\rangle = 2M_s^2 \left( 1 - \frac{d-2}{12} \right) \widehat{\alpha}_{-1}^i \widehat{\alpha}_{-1}^j |0, \mathbf{P}^\mu\rangle.$$

D'où on conclut

$$d = 26,$$

*i.e.* l'espace-temps est de dimension 26.

Les états de niveaux supérieurs ont des masses de la forme  $m^2 = 2M_s^2(n-1)$  où  $n$  est la valeur propre prise par  $\widehat{N}_{\text{tr}}$ .

**Corde ouverte avec conditions de VON NEUMANN.** On procède de façon analogue. On a de même

$$d = 26.$$

Les différentes masses sont  $m^2 = M_s^2(n-1)$  où  $n$  est la valeur propre prise par  $\widehat{N}_{\text{tr}}$ . L'état fondamental est de nouveau un tachyon.

**Corde ouverte quelconque.** Cette fois-ci, la présence de conditions limites de DIRICHLET brise la symétrie de POINCARÉ. Aussi, la symétrie  $SO(d-1)$  est brisée en  $SO(p-1) \times SO(d-p-1)$  s'il y a  $p+1$  conditions limites de VON NEUMANN. On a désormais un terme de masse supplémentaire :  $\frac{1}{l_s^2} \sum_{i \in \mathcal{D}} (\widehat{x}_1^i - \widehat{x}_0^i)^2$ . Du fait de ce terme, les premiers états excités ne seront plus nécessairement de masse nulle et l'on peut ne plus avoir de tachyon.

**Orientation.** On peut souhaiter exiger une symétrie supplémentaire, la non-orientabilité de la corde. Pour ce faire, on définit un opérateur  $\widehat{\Omega}$  de sorte que l'on ait :

$$\widehat{\Omega} \widehat{x}^\mu(\sigma, \tau) \widehat{\Omega}^{-1} = \widehat{x}^\mu(1 - \sigma, \tau).$$

En termes d'oscillateurs, cela signifie pour la corde fermée :

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{\Omega} \widehat{\alpha}_n^\mu \widehat{\Omega}^{-1} = \widehat{\alpha}_n^\mu, \\ \widehat{\Omega} \widehat{\alpha}_n^\mu \widehat{\Omega}^{-1} = \widehat{\alpha}_n^\mu. \end{array} \right.$$

Et pour la corde ouverte :

$$\left| \begin{array}{ll} \widehat{\Omega} \widehat{\alpha}_n^\mu \widehat{\Omega}^{-1} = (-1)^n \widehat{\alpha}_n^\mu & \text{pour les conditions de VON NEUMANN,} \\ \widehat{\Omega} \widehat{\alpha}_n^\mu \widehat{\Omega}^{-1} = (-1)^{n+1} \widehat{\alpha}_n^\mu & \text{pour les conditions de DIRICHLET.} \end{array} \right.$$

D'autre part,  $\widehat{\Omega}^2 = \text{id}$  donc les valeurs propres de  $\widehat{\Omega}$  sont  $\pm 1$ . On admet que son action sur le fondamental est associée à la valeur 1. On a alors complètement déterminé l'action de  $\widehat{\Omega}$ . Si l'on impose cette symétrie, cela revient à projeter notre espace de HILBERT dans l'espace propre associé à la valeur 1. Certains niveaux disparaissent alors.



### III. Théorie conforme des champs.

#### i) INTRODUCTION.

L'idée de cette section est de donner un point de vu différent reposant sur le caractère particulier de la dimension 2, venant du plan complexe. Ce point de vu permet de re-démontrer nombre de résultats de la section précédente et peut aussi bien sûr être utilisée pour aller plus loin.

On observe des changements de coordonnées  $x \rightarrow x'$ . La métrique se transforme alors sous la forme :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x).$$

Le groupe des transformations conformes est le sous-groupe des transformations de coordonnées laissant la métrique invariante à une transformation d'échelle près. Ce sont aussi celles qui préservent les angles. Sur  $\mathbb{C}^*$ , il s'agit des combinaisons de fonctions holomorphes et anti-holomorphes (holomorphes en la variable  $\bar{z}$ ).

Sur la corde fermée, on réalise une rotation de WICK<sup>15</sup> :

$$\tau \rightarrow -i\tau.$$

Alors :

$$\rho^\pm \rightarrow -i(\tau \pm i\sigma).$$

On définit alors les coordonnées complexes  $\omega$  et  $\bar{\omega} = \omega^*$  par :

$$\omega = \tau - i\sigma.$$

Puis les coordonnées planaires  $z$  et  $\bar{z} = z^*$  par :

$$z = e^{\frac{2\pi}{l}\omega} = e^{\frac{2\pi}{l}(\tau - i\sigma)}.$$

Ainsi, le temps  $-\infty$  devient  $z = 0$  et le temps  $+\infty$  devient  $z = \infty$ . A  $\tau$  fixé, les tours selon  $\sigma$  devient des tours autour de 0. Les transformations de  $\tau$  deviennent des transformations de la norme et les transformations de  $\sigma$  des rotations. Les composantes en R et L deviennent des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^*$  en  $z$  ou  $\bar{z}$  respectivement.

Pour la corde ouverte, on peut faire quelque chose d'analogue, avec pour coordonnées planaires  $z$  et  $\bar{z} = z^*$  par :

$$z = e^{\frac{\pi}{l}\omega} = e^{\frac{\pi}{l}(\tau - i\sigma)}.$$

Ainsi, on travaille sur le demi-plan de POINCARÉ  $\mathbb{H}$ . Dans la suite, sauf mention contraire, on considère des cordes fermées.

Un champ  $\phi(z, \bar{z})$  est dit primaire si on a la formule de transformation suivante pour les transformations conformes  $(z, \bar{z}) \rightarrow (z', \bar{z}')$  :

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-k} \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{k}} \phi(z, \bar{z})$$

où  $k, \bar{k}$  sont les poids conformes de  $\phi$ .  $k + \bar{k}$  est la dimension d'échelle et  $k - \bar{k}$  le spin conforme. De façon infinitésimale, si  $(z, \bar{z}) \rightarrow (z + \xi(z), \bar{z} + \bar{\xi}(\bar{z}))$ , on a :

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}) + \delta_{\xi\bar{\xi}}\phi(z, \bar{z})$$

avec

$$\delta_{\xi\bar{\xi}}\phi(z, \bar{z}) = - (k\partial\xi + \bar{k}\bar{\partial}\bar{\xi} + \xi\partial + \bar{\xi}\bar{\partial}) \phi(z, \bar{z}).$$

On a posé  $\partial = \partial_z$  et  $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ .

15. Gian-Carlo Wick, physicien italien (1909-1992).

*Justification.* On a l'équation :

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-k} \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{k}} \phi(z, \bar{z}).$$

On développe tout à l'ordre 1. D'une part :

$$\left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-k} \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{k}} \phi(z, \bar{z}) = (1 - k\partial\xi - \bar{k}\bar{\partial}\bar{\xi})\phi(z, \bar{z}).$$

D'autre part,

$$\phi'(z', \bar{z}') = \phi'(z, \bar{z}) + (\xi\partial + \bar{\xi}\bar{\partial})\phi'(z, \bar{z}) = \phi'(z, \bar{z}) + (\xi\partial + \bar{\xi}\bar{\partial})\phi(z, \bar{z}).$$

D'où le résultat. □

Si  $\bar{k} = 0$ , le champ est dit chiral, si  $k = 0$ , il est dit antichiral. Les autres champs sont dits secondaires. Considérons un champ primaire chiral  $\phi$ . On a donc :

$$\phi(z) = \left( \frac{l}{2\pi} \right)^k z^{-k} \phi_{\text{cyl}}(\omega).$$

Si  $\phi_{\text{cyl}}$  se développe en série de FOURIER, on peut l'écrire :

$$\phi_{\text{cyl}}(\omega) = \left( \frac{2\pi}{l} \right)^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n e^{-\frac{2\pi n \omega}{l}}.$$

On a alors le développement :

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-h}.$$

De plus, on peut exprimer :

$$\phi_n = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{2i\pi} \phi(z) z^{n+h+1},$$

où  $\mathcal{C}_0$  est n'importe quel contour tel que 0 soit d'indice 1.

## ii) TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION.

Considérons le tenseur énergie-impulsion. Sa trace nulle s'écrit en coordonnées conformes

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0.$$

D'autre part, la conservation du moment et de l'énergie s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{\partial}T_{zz} + \partial T_{\bar{z}z} = 0, \\ \bar{\partial}T_{\bar{z}\bar{z}} + \partial T_{z\bar{z}} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\bar{\partial}T_{zz} = \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0.$$

Autrement dit, ces champs sont respectivement holomorphe et anti-holomorphe. Notons  $T(z) = T_{zz}(z)$  et  $\bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ . Si  $\xi$  est holomorphe, on définit sa charge associée par

$$T_\xi = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{2i\pi} \xi(z) T(z).$$

On définit de même  $\bar{T}_{\bar{\xi}}$ .

On souhaite désormais passer en physique quantique. Les opérateurs peuvent donc ne plus commuter. Il faut alors préciser l'ordre des produits d'opérateurs. Pour cela, on place à gauche les opérateurs associés à un temps antérieur, si bien qu'ici sera placé à gauche l'opérateur associé à un complexe de norme plus petite :

$$\mathbf{R} \left( \hat{\phi}(z) \hat{\psi}(\omega) \right) = \begin{cases} \hat{\phi}(z) \hat{\psi}(\omega) & \text{si } |z| < |\omega| \\ \hat{\psi}(\omega) \hat{\phi}(z) & \text{si } |\omega| < |z| \end{cases}$$

On définit de plus les crochets d'opérateurs associés à des complexes de même normes  $z$  et  $\omega$  par :

$$\left[ \hat{\phi}(z), \hat{\psi}(\omega) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \hat{\phi}((1+\epsilon)z) \hat{\psi}(\omega) - \hat{\psi}(\omega) \hat{\phi}((1-\epsilon)z) \right).$$

Si l'on considère une charge, *i.e.* le contour autour de 0 d'un champs  $\hat{Q}_\phi = \oint_{\mathcal{C}_0} \hat{\phi}(z) dz$ , on définit son crochet avec  $\hat{\psi}(\omega)$  par :

$$\left[ \hat{Q}_\phi, \hat{\psi}(\omega) \right] = \oint_{\mathcal{C}(0,|\omega|)} \left[ \hat{\phi}(z), \hat{\psi}(\omega) \right] dz$$

où  $\mathcal{C}(0, r)$  désigne le cercle de centre 0 et de rayon  $r$ . Or, quitte à choisir un bon contour, comme deux opérateurs définis à même temps et en des lieux différents commutent nécessairement du fait de la causalité, on peut le réécrire :

$$\left[ \hat{Q}_\phi, \hat{\psi}(\omega) \right] = \oint_{\mathcal{C}_\omega} dz \mathbf{R} \left( \hat{\phi}(z) \hat{\psi}(\omega) \right).$$

Notons désormais que pour tout champ primaire  $\phi$ , tout point  $\omega$  et toute transformation conforme infinitésimale  $\xi$ , on a :

$$\delta_\xi \hat{\phi}(\omega) = - \left[ \hat{T}_\xi, \hat{\phi}(\omega) \right].$$

Ceci découle du fait que  $\hat{T}$  est le courant associé par le théorème de NOETHER aux transformations des coordonnées de la surface univers, et que les commutateurs ont été construits de la façon souhaitée pour pouvoir utiliser ce qui est appelé l'identité de WARD<sup>16</sup>, que l'on ne détaillera pas ici.

Cette expression se réécrit donc :

$$k(\partial\xi)(\omega) + \xi(\omega)\partial\hat{\phi}(\omega) = \oint_{\mathcal{C}_\omega} \frac{dz}{2i\pi} \xi(z) \mathbf{R} \left( \hat{T}(z) \hat{\phi}(\omega) \right).$$

La formule de CAUCHY<sup>17</sup> nous assure alors que l'on a localement le développement :

$$\mathbf{R} \left( \hat{T}(z) \hat{\phi}(\omega) \right) = \frac{k}{(z-\omega)^2} \hat{\phi}(\omega) + \frac{1}{z-\omega} \left( \partial\hat{\phi} \right) (\omega) + \hat{h}(z)$$

où  $\hat{h}$  est un opérateur holomorphe. On a bien sûr tout de la même façon pour les composantes en barre.

Néanmoins,  $\hat{T}$  n'est pas *a priori* un champ primaire. On peut montrer qu'alors son ordre normal a un développement, dans le cas général, de la forme :

$$\mathbf{R} \left( \hat{T}(z) \hat{T}(\omega) \right) = \frac{\frac{c}{2}}{(z-\omega)^4} + \frac{2\hat{T}(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{(\partial\hat{T})(\omega)}{z-\omega} + \hat{h}(z)$$

16. John Clive WARD, physicien britannique et australien (1924-2000).

17. Augustin Louis CAUCHY, mathématicien français, polytechnicien (1789-1857).

avec  $\widehat{h}$  un opérateur holomorphe. On en déduit que  $\widehat{T}$  se transforme comme un champ primaire de poids 2 pour les transformation  $\xi$  telle que  $\partial^3 \xi = 0$ . Mais si  $c \neq 0$ , cela n'est pas généralement vrai. C'est ce que l'on appelle une anomalie conforme, un effet purement quantique.

Développons maintenant  $\widehat{T}$  en série de LAURENT autour de 0 :

$$\widehat{T}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{L}_n}{z^{n+2}}$$

où

$$\widehat{L}_n = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{2i\pi} z^{n+1} \widehat{T}(z).$$

Les  $\widehat{L}_n$  sont les générateurs de VIRASORO. Nous allons justifier qu'ils forment la même algèbre que les opérateurs de VIRASORO. D'abord, comme  $\widehat{T}$  est réel, on a

$$\left(\widehat{L}_n\right)^\dagger = \widehat{L}_{-n}.$$

On a alors :

$$\left[\widehat{L}_m, \widehat{L}_n\right] = (m-n)\widehat{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{n+m,0}.$$

On retrouve donc bien l'algèbre que les opérateurs de VIRASORO avec  $c$  remplaçant  $d$ .

*Justification.* Ecrivons la définition avant d'utiliser l'expression de  $R\left(\widehat{T}(\omega)\widehat{T}(z)\right)$  et le théorème des résidus (ainsi qu'une intégration par parties pour l'un des termes).

$$\begin{aligned} \left[\widehat{L}_m, \widehat{L}_n\right] &= \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{d\omega}{2i\pi} \omega^{n+1} \left[\widehat{L}_m, \widehat{T}(\omega)\right] \\ &= \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{d\omega}{2i\pi} \omega^{n+1} \oint_{\mathcal{C}_\omega} \frac{dz}{2i\pi} z^{m+1} R\left(\widehat{T}(\omega)\widehat{T}(z)\right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{d\omega}{2i\pi} \omega^{n+1} \oint_{\mathcal{C}_\omega} \frac{dz}{2i\pi} z^{m+1} \left( \frac{\frac{c}{2}}{(z-\omega)^4} + \frac{2\widehat{T}(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{(\partial\widehat{T})(\omega)}{z-\omega} + \widehat{h}(z) \right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{d\omega}{2i\pi} \omega^{n+1} \left( \frac{m(m+1)(m-1)}{12} c\omega^{m-2} + 2(m+1)\omega^m \widehat{T}(\omega) + \omega^{m+1} (\partial\widehat{T})(\omega) \right) \\ &= \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + 2(m+1)\widehat{L}_{m+n} - (m+n+2) \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{d\omega}{2i\pi} \omega^{m+n+1} \widehat{T}(\omega) \\ &= \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + (m-n)\widehat{L}_{m+n}. \end{aligned}$$

□

Notons que  $\widehat{L}_n$  est le charge associée à  $z^{n+1}$ . Aussi, les  $\widehat{L}_n$  et les  $\widehat{L}_{-n}$  construits symétriquement engendrent toutes les transformations conformes. En particulier,  $\widehat{L}_0$ ,  $\widehat{L}_{-1}$  et  $\widehat{L}_1$  engendre l'action linéaire fractionnaire étudiée dans le premier chapitre.

Pour rappel, on définit comme suit une action du groupe  $SL_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{S}$ . Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $SL_2(\mathbb{C})$ , on pose pour tout  $z$  appartenant à  $\mathbb{S}$  :

$$\gamma \cdot z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \text{ ou } (z = \infty \text{ et } c = 0) \end{cases}$$

*Justification.* Développons cette action autour de  $\gamma = \text{id}$ . On obtient alors :

$$\frac{z(1 + \delta\mathbf{a}) + \delta\mathbf{b}}{z\delta\mathbf{c} + 1 + \delta\mathbf{d}} = (z(1 + \delta\mathbf{a}) + \delta\mathbf{b})(-z\delta\mathbf{c} + 1 - \delta\mathbf{d}) = z - (\delta\mathbf{c})z^2 + (\delta\mathbf{a} - \delta\mathbf{d})z + \delta\mathbf{b}.$$

Or, appartenir à l'espace tangent en  $\text{id}$  à  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  revient à être de trace nulle, *i.e.*  $\delta\mathbf{a} + \delta\mathbf{d} = 0$ . on retrouve donc bien exactement les transformations engendrer par  $\widehat{\text{L}}_0$ ,  $\widehat{\text{L}}_{-1}$  et  $\widehat{\text{L}}_1$ .  $\square$

Pour les cordes ouvertes, les conditions limites sur l'axe réel permettent de montrer que l'on a alors  $\text{T} = \overline{\text{T}}$  sur cette droite. Ceci permet ensuite de définir  $\text{T}$  sur le plan entier en l'étendant sur le demi-plan inférieur à l'aide de  $\overline{\text{T}}$ . Cette méthode permet de condenser les parties holomorphes en anti-holomorphes en un tout défini globalement sur le plan. Ce point est à rapprocher de ce que l'on avait dans la section précédente. Dans ce contexte, les résultats précédents de cette section tiennent toujours.

### iii) DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LAURENT.

Revenons aux cordes fermées. Les équations du mouvement s'écrivent

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)x^\mu = 0.$$

Mais

$$\partial = \frac{\partial_\sigma + i\partial_\tau}{2}$$

et  $\bar{\partial}$  est son conjugué. Aussi, les équations du mouvement s'écrivent en complexe :

$$\partial\bar{\partial}x^\mu = \bar{\partial}\partial x^\mu = 0.$$

Ainsi,  $\partial x^\mu$  est holomorphe et  $\bar{\partial}x^\mu$  est anti-holomorphe. On dispose donc de développements en série de LAURENT autour de l'origine :

$$\begin{cases} \partial x^\mu(z) = -\frac{i\mathfrak{l}_s}{\sqrt{8\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, \\ \bar{\partial}x^\mu(z) = -\frac{i\mathfrak{l}_s}{\sqrt{8\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}}. \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \alpha_m^\mu = \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_{\mathcal{C}_0} z^m \partial x^\mu(z) dz, \\ \bar{\alpha}_m^\mu = -\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_{\mathcal{C}_0} \bar{z}^m \bar{\partial}x^\mu(z) d\bar{z}. \end{cases}$$

Notons que  $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu$ .

*Justification.* Changeons  $d\bar{z}$  en  $dz$  dans l'expression de  $\bar{\alpha}_0$ , ce qui revient à changer l'orientation :

$$\begin{aligned} \alpha_0^\mu - \bar{\alpha}_0^\mu &= \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_{\mathcal{C}_0} z^m \partial x^\mu(z) dz - \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_{\mathcal{C}_0} \bar{\partial}x^\mu(z) d\bar{z} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_{\mathcal{C}_0} (\partial + \bar{\partial}) x^\mu(z) dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_{\mathcal{C}_0} \partial_\sigma x^\mu(z) dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{l}_s} \oint_0^l \partial_\sigma x^\mu(\sigma, \tau) d\sigma \\ &= 0 \text{ par périodicité.} \end{aligned}$$

$\square$

Le courant associé par le théorème de NOETHER aux translations est  $j^\mu = \frac{i}{\alpha'} \partial x^\mu$  et  $\bar{j}^\mu = -\frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} x^\mu$ . L'impulsion s'écrit alors :

$$P^\mu = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_0} (j^\mu dz - \bar{j}^\mu d\bar{z}) = \sqrt{2} \alpha' \alpha_0^\mu.$$

En intégrant l'expansion, on peut déterminer  $x^\mu$  :

$$x^\mu = X^\mu - i \frac{\alpha'}{2} P^\mu \ln(|z|^2) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{m} \left( \frac{\alpha_m^\mu}{z^m} + \frac{\bar{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m} \right).$$

La quantification est alors similaire à celle de la section précédente.

Dans le cas des cordes ouvertes, les conditions de VON NEUMANN assure  $\partial x^\mu = \bar{\partial} x^\mu$  sur l'axe réel. Comme précédemment, on peut donc étendre le tout sur  $\mathbb{C}^*$  en ne gardant qu'un jeu de variables. Là encore, on retrouve les résultats de la section précédente.

#### iv) FONCTION DE PARTITION.

Rappelons que l'on a

$$\hat{m}^2 = \frac{4\pi M_s}{l_s} (\hat{N}_{\text{tr}} + \bar{\hat{N}}_{\text{tr}} - 2)$$

où  $\hat{N}_{\text{tr}} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{\alpha}_{-n}^l \hat{\alpha}_n^l$  et  $\bar{\hat{N}}_{\text{tr}} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \bar{\hat{\alpha}}_{-n}^l \bar{\hat{\alpha}}_n^l$ . On a comme états les différentes valeurs possibles de  $2\hat{\alpha}_{-n}^l \hat{\alpha}_n^l$  à  $l$  fixé, qui est  $n \mathbb{N}$ , et de même pour les conjugués. De plus, on a la contrainte  $N_{\text{tr}} = \bar{N}_{\text{tr}}$ . On peut alors définir une fonction de partition pour un certain paramètre  $\tau_2$  :

$$\mathcal{Z}(\tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{12}} \sum_{\text{état } |\xi\rangle} e^{-\frac{1}{2M_s} \tau_2 \langle \xi | \hat{m}^2 | \xi \rangle}.$$

Pour gérer correctement la contrainte  $N_{\text{tr}} = \bar{N}_{\text{tr}}$ , il est utile d'ajouter un paramètre  $\tau_1$  et de compter

$$\mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{12}} \sum_{\text{état sans contrainte } |\xi\rangle} q^{\langle \xi | (\hat{N}_{\text{tr}} - 1) | \xi \rangle} \bar{q}^{\langle \xi | (\bar{\hat{N}}_{\text{tr}} - 1) | \xi \rangle}$$

où

$$q = e^{2i\pi(\tau_1 + i\tau_2)}$$

et  $\bar{q}$  est son conjugué.

On compte alors :

$$\mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{12}} \prod_{i=2}^{25} \left[ \left( q^{-1} \prod_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} q^{nk} \right) \left( \bar{q}^{-1} \prod_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{q}^{nk} \right) \right] = \frac{1}{\tau_2^{12}} \left( q^{-1} \prod_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - q^l} \right)^{24} \left( \bar{q}^{-1} \prod_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - \bar{q}^l} \right)^{24}.$$

Rappelons que dans le premier chapitre, nous avons introduit la fonction  $\eta$  de DEDEKIND :

$$\eta(z) = e^{\frac{2i\pi z}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z}).$$

Posons alors

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2$$

et  $\bar{\tau}$  son conjugué. Il vient :

$$\mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{12}} \frac{1}{\eta(\tau)^{24} \overline{\eta(\tau)}^{24}}.$$

Désormais, on affirme que l'on a :

$$\mathfrak{Z}(\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau_1 \mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2).$$

*Justification.* On a

$$\mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{12}} \sum_{\text{état sans contrainte } |\xi\rangle} e^{-\frac{1}{2M_s} \tau_2 \langle \xi | \widehat{m}^2 | \xi \rangle} e^{2i\pi\tau_1 \langle \xi | (\widehat{N}_{\text{tr}} - \widehat{\bar{N}}_{\text{tr}}) | \xi \rangle}.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau_1 \mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2^{12}} \sum_{\text{état sans contrainte } |\xi\rangle} e^{-\frac{1}{2M_s} \tau_2 \langle \xi | \widehat{m}^2 | \xi \rangle} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau_1 e^{2i\pi\tau_1 \langle \xi | (\widehat{N}_{\text{tr}} - \widehat{\bar{N}}_{\text{tr}}) | \xi \rangle} \\ &= \frac{1}{\tau_2^{12}} \sum_{\text{état sans contrainte } |\xi\rangle} e^{-\frac{1}{2M_s} \tau_2 \langle \xi | \widehat{m}^2 | \xi \rangle} \delta_{\langle \xi | (\widehat{N}_{\text{tr}} - \widehat{\bar{N}}_{\text{tr}}) | \xi \rangle = 0} \\ &= \frac{1}{\tau_2^{12}} \sum_{\text{état avec contrainte } |\xi\rangle} e^{-\frac{1}{2M_s} \tau_2 \langle \xi | \widehat{m}^2 | \xi \rangle} \\ &= \mathfrak{Z}(\tau_2) \end{aligned}$$

□

Ainsi,

$$\mathfrak{Z}(\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau_1 \frac{1}{|\eta(\tau)|^{48}}.$$

Nous verrons dans la suite que cette variable  $\tau$  permet de paramétrer un tore. Notons de plus qu'au vu de ce résultat,  $\tau$  est défini à une invariance modulaire près.

## IV. compactification toroïdale et énergie du vide.

### i) COMPACTIFICATION D'UNE DIMENSION POUR LA CORDE FERMÉE.

D'abord, pour simplifier les notations, on choisira désormais  $l = 2\pi$  pour les cordes fermées et  $l = \pi$ . On se place toujours en dimension 26. Néanmoins désormais on compactifie une dimension (on choisira le numéro 25), qui vie maintenant sur un cercle de rayon  $R$ . Autrement dit, pour tout entier  $L$ , on a

$$x^{25} = x^{25} + 2\pi RL.$$

Cela impose de réviser nos conditions périodiques. Par continuité, on a l'existence de  $L$  un entier de sorte que la condition limite s'écrive :

$$x^{25}(\sigma + 2\pi, \tau) = x^{25}(\sigma, \tau) + 2\pi LR.$$

Le nombre  $L$  correspond au nombre algébrique d'enroulements de la cordes autour de la dimension compacte. C'est bien sûr un entier. La quantification mènera à de nouveaux états, selon la valeur de  $L$ . Ce sont les états d'enroulage. Le développement en oscillateurs de  $x^{25}$  s'écrit désormais :

$$x^{25}(\sigma, \tau) = X^{25} + \alpha' \tau P^{25} + LR\sigma + i \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left( \alpha_n^{25} e^{-in(\tau-\sigma)} + \bar{\alpha}_n^{25} e^{-in(\tau+\sigma)} \right).$$

$X^{25}$  et  $P^{25}$  sont comme avant. Mais pour que la fonction d'onde  $e^{iX^{25}P^{25}}$  soit bien définie, on a l'existence d'un entier  $M$  tel que  $P^{25} = \frac{M}{R}$ . L'impulsion moyenne est donc aussi quantifiée. On peut déterminer les termes croissant ou décroissant :

$$\begin{cases} x_R^{25}(\sigma, \tau) = \frac{X^{25}-c}{2} + \frac{\alpha'}{2} \left( \frac{M}{R} - \frac{LR}{\alpha'} \right) (\tau - \sigma) + i \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in(\tau-\sigma)}, \\ x_L^{25}(\sigma, \tau) = \frac{X^{25}+c}{2} + \frac{\alpha'}{2} \left( \frac{M}{R} + \frac{LR}{\alpha'} \right) (\tau + \sigma) + i \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^{25} e^{-in(\tau+\sigma)}. \end{cases}$$

Avec  $c$  une constante. On quantifie ces résultats. On peut ensuite obtenir l'opérateur de masse  $\hat{m}^2 = \sum_{i=0}^{24} \hat{P}^i \hat{P}_i$  :

$$\begin{cases} \alpha' \hat{m}_L^2 = \frac{\alpha'}{2} \left( \frac{M}{R} + \frac{LR}{\alpha'} \right)^2 + 2(\hat{N}_L - 1), \\ \alpha' \hat{m}_R^2 = \frac{\alpha'}{2} \left( \frac{M}{R} - \frac{LR}{\alpha'} \right)^2 + 2(\hat{N}_R - 1). \end{cases}$$

$\hat{N}$  est comme précédemment. On a de plus :

$$\alpha' \hat{m}^2 = \alpha' \hat{m}_L^2 + \alpha' \hat{m}_R^2 = \alpha' \frac{M^2}{R^2} + \frac{1}{\alpha'} L^2 R^2 + 2(\hat{N}_L + \hat{N}_R - 2).$$

La contrainte de reparamétrisation donne toujours

$$m_L^2 = m_R^2$$

*i.e.*

$$N_R - N_L = ML.$$

Notons que l'on a désormais la symétrie :

$$\begin{cases} R \longrightarrow \frac{1}{R}, \\ L \longleftarrow M. \end{cases}$$

Sous cette transformation, les oscillateurs s'échangent également. Une conséquence de cette symétrie est qu'un univers très petit est symétrique à un univers très grand, le point fixe étant  $\sqrt{\alpha'}$ . Notamment, dans un tel système, un *big bang* ne peut exister.

## ii) COMPACTIFICATION DE PLUSIEURS DIMENSIONS POUR LA CORDE FERMÉE.

On se donne un réseau

$$\Lambda_D = \bigoplus_{i=1}^D e_i \mathbb{Z}.$$

Les  $e_i$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^D$ . On va compactifier  $D$  dimensions en quotientant l'espace-temps selon ces directions : pour tout entiers  $n^1, \dots, n^D$ ,

$$x^j = x^j + 2\pi \sum_{i=1}^D n^i e_i^j = x^j + 2\pi L^j$$



où

$$L^j = \sum_{i=1}^D n^i e_i^j.$$

Les dimensions compactifiées seront indexées par  $j$ . Comme précédemment, il faut que  $e^{iX^j P_j}$  soit bien défini, *i.e.*

$$L^j P_j \in \mathbb{Z}.$$

Notons  $\Lambda_D^*$  le réseau dual de  $\Lambda_D$ . Il s'agit du réseau de dimension  $D$  engendré par les  $e_i^*$  donnés par la relation : si  $i$  et  $j$  sont deux entiers,

$$e_i \cdot e_j^* = \delta_i^j.$$

On définit la métrique de  $\Lambda_D$  par

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j.$$

Et celle de  $\Lambda_D^*$  est :

$$g_{ij}^* = e_i^* \cdot e_j^* = (g^{-1})_{ij}$$

que l'on notera  $g^{ij}$ . Le volume de la cellule unité est  $\text{Vol}(\Lambda_D) = \sqrt{\det(g)}$  et pour le dual  $\text{Vol}(\Lambda_D^*) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}$ .

On doit alors avoir des entiers  $m_1, \dots, m_D$  de sorte que

$$P_j = \sum_{i=1}^D m_i e_j^{*i}.$$

Les conditions de périodicité des  $D$  directions concernées dont désormais :

$$x^j(\sigma + 2\pi, \tau) = x^j(\sigma, \tau) + 2\pi L^j.$$

Comme précédemment, on peut écrire  $x^j = x_R^j + x_L^j$ . Et pour les direction compactifiées, on obtient alors :

$$\begin{cases} x_R^j(\sigma, \tau) = \frac{X^j}{2} + \frac{\alpha'}{2} \left( P^j - \frac{L^j}{\alpha'} \right) (\tau - \sigma) + i \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^j e^{-in(\tau - \sigma)}, \\ x_L^j(\sigma, \tau) = \frac{X^j}{2} + \frac{\alpha'}{2} \left( P^j + \frac{L^j}{\alpha'} \right) (\tau + \sigma) + i \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^j e^{-in(\tau + \sigma)}. \end{cases}$$

L'opérateur de masse  $\hat{m}^2 = \sum_{i=0}^{25-D} \hat{p}^i \hat{p}_i$  s'écrit alors :

$$\begin{cases} \alpha' \hat{m}_L^2 = \frac{\alpha'}{2} \sum_j \left( P^j + \frac{L^j}{\alpha'} \right)^2 + 2(\hat{N}_L - 1), \\ \alpha' \hat{m}_R^2 = \frac{\alpha'}{2} \sum_j \left( P^j - \frac{L^j}{\alpha'} \right)^2 + 2(\hat{N}_R - 1). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\alpha' \hat{m}^2 = \alpha' (\hat{m}_L^2 + \hat{m}_R^2) = 2(\hat{N}_L + \hat{N}_R - 2) + \sum_j \left( \alpha' P^j P_j + \frac{1}{\alpha'} L^j L_j \right) = 2(\hat{N}_L + \hat{N}_R - 2) + \sum_{i,j=1}^D \left( \alpha' m_i m_j g^{ij} + \frac{1}{\alpha'} n^i n^j g_{ij} \right).$$

De plus, la contrainte s'écrit désormais :

$$N_R - N_L = P \cdot L = \sum_{j=1}^D m_j n^j.$$

**iii) FONCTION DE PARTITION.**

Calculons la nouvelle fonction de partition. On reprend la méthode du chapitre précédent et calcule :

$$\mathcal{Z}(\tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{\frac{24-D}{2}}} \sum_{\text{état } |\xi\rangle} e^{-\frac{1}{2M_s} \tau_2 \langle \xi | \widehat{m}^2 | \xi \rangle}.$$

Pour gérer correctement la contrainte  $N_{\text{tr}} = \bar{N}_{\text{tr}}$ , il est utile d'ajouter un paramètre  $\tau_1$  et de compter

$$\mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{\frac{24-D}{2}}} \sum_{\text{état sans contrainte } |\xi\rangle} q^{\langle \xi | (\widehat{N}_{\text{tr}} - 1) | \xi \rangle} \bar{q}^{\langle \xi | (\widehat{\bar{N}}_{\text{tr}} - 1) | \xi \rangle}$$

où

$$q = e^{2i\pi(\tau_1 + i\tau_2)}$$

et  $\bar{q}$  est son conjugué. On a en effet démontré :

$$\mathcal{Z}(\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\tau_1 \mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2).$$

On avait dans le cas libre :

$$\mathfrak{z}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2^{12}} \frac{1}{\eta(\tau)^{24} \bar{\eta}(\tau)^{24}}.$$

Désormais, on ajoute un terme de masse lié à la compactification. On obtient alors :

$$\mathfrak{z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\tau_2^{\frac{24-D}{2}}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^{48}} \sum_{P^j, L^j} q^{\frac{\alpha'}{4} \sum_j (P^j - \frac{L^j}{\alpha'})^2} \bar{q}^{\frac{\alpha'}{4} \sum_j (P^j + \frac{L^j}{\alpha'})^2}.$$

Dans le cas d'une seule direction compact, on a ainsi :

$$\mathfrak{z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\tau_2^{\frac{24-D}{2}}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^{48}} \sum_{M, L \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\alpha'} \frac{M}{R} - \frac{RL}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\alpha'} \frac{M}{R} + \frac{RL}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2}.$$

On retrouve la symétrie

$$R \longrightarrow \frac{\alpha'}{R}.$$

**iv) INTERACTION TOROÏDALE.**

On considère un diagramme d'interaction des plus simples avec une corde : un tore. Celui-ci peut être vu comme planaire, un parallélogramme formé par les vecteurs  $v$  et  $w$  libres, qui est le quotient de  $\mathbb{C}$  par  $v\mathbb{Z} + w\mathbb{Z}$ . Néanmoins, si l'on considère tous les vecteurs  $v$  et  $w$ , il y a des redondances. Déjà, quitte à translater par l'invariance de WEYL, on peut choisir  $w = 1$ . On pourrait souhaiter se ramener à un carré par un changement de jauge, mais alors on obtiendrait la métrique

$$ds^2 = |d\sigma + v d\tau|^2.$$

Ce paramètre  $v$ , usuellement noté  $\tau$  (mais n'est pas la variable temporelle!) est appelé paramètre de TEICHMÜLLER<sup>18</sup>.

18. Oswald TEICHMÜLLER, mathématicien allemand, nazi (1913-1943).

Il reste néanmoins encore quelques invariances supplémentaires, liées à la dimension 2. Déjà, on a clairement la symétrie entre  $\tau$  et  $\bar{\tau}$ . On se ramène donc  $\Im(\tau) > 0$ . Ensuite, on peut démontrer l'équivalence des tores sous les transformations  $\tau \rightarrow \tau + 1$  et  $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ . Ainsi, on a l'invariance modulaire de  $\tau$ . Comme étudié dans le premier chapitre, on se contenterait de faire varier  $\tau$  sur le domaine fondamental associé :

$$\mathfrak{F} = \left\{ z \in \mathbb{H}, -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq -\frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1 \right\}$$

En outre, il reste encore quelques degrés de liberté :

- (i) Les translations  $\rho^\alpha \rightarrow \rho^\alpha + \nu^\alpha$ .
- (ii) L'inversion  $\rho^\alpha \rightarrow -\rho^\alpha$ .
- (iii) L'orientation  $\tau \rightarrow -\bar{\tau}$ .

Ces symétries forment le groupe conforme de KILLING<sup>19</sup>.

Pour simplifier, on se place en dimension 1 dans l'espace cible, compactifié en un cercle de rayon R. On choisit la jauge telle que le tore soit un carré de côté 1. La métrique est alors  $ds^2 = |d\rho^1 + \tau d\rho^2|^2$ . Celle-ci est issue de la matrice

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $ds^2 = \mathfrak{h}_{ij} d\rho^i d\rho^j$ . Et donc

$$\mathfrak{h}^{\alpha\beta} = (\mathfrak{h}^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'action s'écrit :

$$\mathcal{S}_P(x) = -\frac{M_s}{2l_s} \int_{\Sigma} d^2\rho \sqrt{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial \rho^\alpha} \frac{\partial x}{\partial \rho^\beta} = -\frac{M_s}{2l_s} \int_0^1 d\rho^1 \int_0^1 d\rho^2 \frac{1}{\tau_2} |\tau \partial_1 x - \partial_2 x|^2.$$

Par une intégration par parties, en posant

$$\square = \frac{1}{\tau_2} |\tau \partial_1 - \partial_2|^2$$

on peut réécrire :

$$\mathcal{S}_P(x) = -\frac{M_s}{2l_s} \int_0^1 d\rho^1 \int_0^1 d\rho^2 x \square x$$

si l'on ne considère pas la différence de termes équivalents.

Posons la fonction de partition issue de l'intégrale de chemin :

$$\mathfrak{z}(\tau) = \int \mathcal{D}x e^{-S}.$$

On va justifier qu'elle coïncide avec la fonction  $\mathfrak{z}$  de la sous-section précédente. Les solutions classiques de l'équation du mouvement  $\square x = 0$  sont

$$x = 2\pi R(n\rho^1 + m\rho^2)$$

pour  $m$  et  $n$  entiers. Ces entiers correspondent à l'enroulement de la corde autour de la dimension compacte. Bien sûr ces solutions respectent les conditions de périodicité. L'action associée devient  $\mathcal{S}_P(x) = \frac{\pi R^2}{\tau_2 l_s^2} |m - n\tau|^2$ . On développe ensuite autour de ces solutions de base :

$$x = \mathcal{X} + \chi.$$

19. Wilhelm KILLING, mathématicien allemand (1847-1923).

On admet que l'on peut alors réécrire la fonction de partition sous la forme :

$$\mathfrak{z}(\tau) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi R^2}{\tau_2 l_s^2} |m - n\tau|^2} \int \mathcal{D}\chi e^{-S_P(\chi)}.$$

L'idée est alors que diagonaliser  $\square$  de sorte à écrire l'intégrale comme un produit de Gaussiennes. On peut voir que les états propres de  $\square$  sont les fonctions

$$\psi_{a,b} = e^{2i\pi(a\rho^1 + b\rho^2)}$$

associées à la valeur propre

$$\lambda_{ab} = \frac{4\pi^2}{\tau_2} |a\tau - b|^2$$

pour  $a$  et  $b$  des entiers. Le cas  $a = b = 0$  est traité à part car ne fournit pas une Gaussienne. Ce terme donnera  $\int_0^{2\pi R} d\chi_0 = 2\pi R$ , puisqu'en dehors de cette bande, on atteint les niveaux classiques suivants. Ainsi, on s'attend à obtenir :

$$\int \mathcal{D}\chi e^{-S_P(\chi)} = \frac{2\pi R}{l_s} \prod_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0\}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{ab}}}.$$

Une régularisation  $\zeta$  que l'on admettra permet ensuite de montrer

$$\int \mathcal{D}\chi e^{-S_P(\chi)} = \frac{R}{l_s \sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2}.$$

Il vient alors :

$$\mathfrak{z}(\tau) = \frac{R}{l_s \sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi R^2}{\tau_2 l_s^2} |m - n\tau|^2}.$$

Cette expression est dite Lagrangienne. Une sommation de POISSON sur  $m$  permet enfin de réécrire sous une nouvelle expression, dite Hamiltonienne :

$$\mathfrak{z}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\alpha'} \frac{a}{R} - \frac{Rb}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\alpha'} \frac{a}{R} + \frac{Rb}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2}.$$

On retrouve le résultat de la sous-section précédente et on admet qu'il se généralise à toute dimension. On a ici une nouvelle interprétation de  $\tau$ , qui correspond à la paramétrisation du tore que forme la corde en interaction. Pour avoir la fonction de partition totale de cette première interaction, il faut donc sommer sur les différents  $\tau$  du domaine fondamentale  $\mathfrak{F}$  :

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{z}(\tau, \bar{\tau}) d\tau.$$

Enfin, notons que l'on peut décompactifier une dimension en faisant  $R$  tend vers  $+\infty$ . En dimension 1, en reprenant l'expression Lagrangienne, on a alors

$$\mathfrak{z}(\tau) \sim \frac{V}{2\pi l_s \sqrt{\tau_2} |\eta(\tau)|^2}$$

où  $V$  désigne le volume de la corde. Ce résultat peut ensuite se généraliser.

Cette interaction intrinsèque à la corde est la plus basique. Pour avoir l'interaction complète, il faut ensuite sommer sur les surfaces de RIEMANN de tous les genres (au sens mathématique du terme), *i.e.* les  $n$ -tore pour  $n$  entier positif. L'un des intérêts de la théorie des cordes comparée à la théorie des champs classique est que ces interactions, qui constituent l'énergie du vide, ne diverge plus. Aussi, par rapport à la relativité générale, la courbure induite n'est plus infinie, et on peut véritablement intégrer la gravité. La limite étant que même s'il n'y a plus de divergence, la valeur obtenue est bien plus grande que la valeur observée par les astrophysiciens, avec un facteur de l'ordre de  $10^{120}$ .

## V. Supercordes.

### i) ACTION ET JAUGE SUPER-CONFORME.

On souhaite désormais modéliser des fermions. Pour cela, on ajoute des spineurs à l'action. En symétrie des coordonnées  $x^\mu$  on ajoute le fermion de WEYL,  $\psi^\mu$ , qui est un  $d$ -vecteur de matrices  $2 \times 1$ , les spineurs de MAJORANA<sup>20</sup>, dont les composantes sont des nombres de GRASSMANN<sup>21</sup>. On n'entrera pas dans les détails techniques. Le point important étant qu'ils anti-commutent. On note la charge de conjugaison

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $v$  est un vecteur  $2 \times 1$ , on note alors  $\bar{v} = v^T c$  où  $v^T$  désigne la transposée de  $v$ . On définit les matrices de DIRAC<sup>22</sup>  $\mathcal{D}^\alpha$  par :

$$\mathcal{D}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit également un anticommutateur par

$$\{A, B\}_{\mathfrak{A}} = AB + BA.$$

Notons alors que l'on a :

$$\{\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}^\beta\}_{\mathfrak{A}} = 2\eta^{\alpha\beta} \text{id}$$

où toujours  $\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$ . Définissons de plus les variables

$$D^\alpha = \epsilon_\beta^\alpha \mathcal{D}^\beta$$

où  $\epsilon$  est défini par l'équation

$$\epsilon_a^\alpha \epsilon_b^\beta \eta^{ab} = \eta^{\alpha\beta}.$$

Afin d'obtenir une théorie super-symétrique, *i.e.* avec une symétrie boson-fermion, il faut ajouter une variable supplémentaire, le gravitino  $\chi_\alpha$  qui est une matrice de taille  $2 \times 1$  dont les éléments sont des fermions de MAJORANA. Celle-ci sert en quelque sorte de terme croisé lié à une mauvaise jauge. L'action complète de la super-corde sera alors :

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma d^2\rho \sqrt{-\mathfrak{h}} \left( \frac{2}{\alpha'} \mathfrak{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu + 2i\bar{\psi}^\mu D^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - i\bar{\chi}_\alpha D^\beta D^\alpha \psi^\mu \left( \sqrt{2}\alpha' \partial_\beta x_\mu - \frac{i}{4}\bar{\chi}_\beta \psi_\mu \right) \right).$$

Comme précédemment, cette action s'accompagne de nombre de symétries. En plus de celles déjà établies, l'invariance de reparamétrisation s'étend bien sûr aux nouvelles variables. De même, les invariances de WEYL et de LORENTZ<sup>23</sup> (parmi celles de POINCARÉ) s'appliquent aussi aux fermions. Enfin, une symétrie supplémentaire, l'invariance de super-WEYL exprime les degrés de libertés du choix du gravitino.

Nous ne détaillerons pas les aspects techniques mais comme précédemment où nous pouvions choisir la jauge conforme pour fixer  $\mathfrak{h} = \eta$ , on peut ici fixer la jauge super-conforme où  $\mathfrak{h} = \eta$ ,  $D = \mathcal{D}$  et  $\chi = 0$ . Dans cette jauge, l'action se réécrit alors :

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma d^2\rho \left( \frac{2}{\alpha'} \partial^\alpha x^\mu \partial_\alpha x_\mu + 2i\bar{\psi}^\mu \mathcal{D}^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \right).$$

20. Ettore MAJORANA, physicien italien, mystérieusement disparu (1906-1938?).

21. Hermann Günther GRASSMANN, mathématicien allemand (1809-1877).

22. Paul DIRAC, physicien et mathématicien britannique (1902-1984).

23. Hendrik LORENTZ, physicien néerlandais (1853-1926).

Les équations du mouvement sont alors :

$$\left| \begin{array}{l} \partial^\alpha \partial_\alpha x^\mu = 0, \\ \mathfrak{D}^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu = 0. \end{array} \right.$$

On peut de nouveau calculer le tenseur énergie-impulsion. On a désormais :

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left( \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\mu - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial^\gamma x^\mu \partial_\gamma x_\mu \right) - \frac{i}{4} (\bar{\psi}^\mu \mathfrak{D}_\alpha \partial_\beta \psi_\mu + \bar{\psi}^\mu \mathfrak{D}_\beta \partial_\alpha \psi_\mu).$$

Et on a toujours par invariance de WEYL :  $T_\alpha^\alpha = 0$ . On peut de plus définir un tenseur non plus lié au changement de métrique, mais de gravitino. On le notera  $\mathfrak{T}_\alpha$  et celui-ci vaut :

$$\mathfrak{T}_\alpha = -\frac{1}{4} \sqrt{2} \alpha' \mathfrak{D}^\beta \mathfrak{D}_\alpha \psi^\mu \partial_\beta x_\mu.$$

Et on a de façon analogue par invariance de super-WEYL :  $\mathfrak{D}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha = 0$ . On a également la conservation des courants par invariance par reparamétrisation :

$$\left| \begin{array}{l} \partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0, \\ \partial^\alpha \mathfrak{T}_\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Les équations du mouvement pour la métrique et le gravitino peuvent alors s'exprimer sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} T_{\alpha\beta} = 0, \\ \mathfrak{T}_\alpha = 0. \end{array} \right.$$

On se place en coordonnées de cône-lumière, *i.e.*  $\rho^\pm = \tau \pm \sigma$  comme dans la première section du chapitre. De plus, pour les spineurs, on note

$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}.$$

On écrira alors  $\psi_+$  le d-vecteur des coordonnées "+" par exemple. L'action s'écrit alors :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\rho \left( \frac{2}{\alpha'} \partial_{+\mathbf{x}} \cdot \partial_{-\mathbf{x}} + i(\psi_+ \cdot \partial_- \psi_+ + \psi_- \cdot \partial_+ \psi_-) \right).$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\left| \begin{array}{l} \partial_+ \partial_- x^\mu = 0, \\ \partial_- \psi_+^\mu = \partial_+ \psi_-^\mu = 0. \end{array} \right.$$

Le tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} T_{++} = -\frac{1}{\alpha'} \partial_{+\mathbf{x}} \cdot \partial_{+\mathbf{x}} - \frac{i}{2} \psi_+ \cdot \partial_+ \psi_+, \\ T_{--} = -\frac{1}{\alpha'} \partial_{-\mathbf{x}} \cdot \partial_{-\mathbf{x}} - \frac{i}{2} \psi_- \cdot \partial_- \psi_-, \\ T_{+-} = T_{-+} = 0. \end{array} \right.$$

Le tenseur lié au gravitino ne contient plus, lui aussi, que deux composantes non-trivialement nulle :

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{T}_+ = -\sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \psi_+ \cdot \partial_{+\mathbf{x}}, \\ \mathfrak{T}_- = -\sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \psi_- \cdot \partial_{-\mathbf{x}}. \end{array} \right.$$

Les équations de la métrique et du gravitino sont enfin :

$$\begin{cases} \mathbb{T}_{++} = \mathbb{T}_{--} = 0, \\ \mathbb{T}_+ = \mathbb{T}_- = 0. \end{cases}$$

Déterminons l'Hamiltonien. On a tout d'abord :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} \int d\sigma \left( \frac{2}{\alpha'} \partial^\alpha x^\mu \partial_\alpha x_\mu + 2i\bar{\psi}^\mu \mathcal{D}^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \right).$$

On a toujours l'impulsion bosonique :

$$P^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma \dot{x}^\mu.$$

Et l'impulsion fermionique :

$$\mathfrak{P}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\mu} = \frac{1}{4i\pi\alpha'} \int d\sigma \bar{\psi}^\mu \mathcal{D}^1.$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= P^\mu \dot{x}_\mu + \mathfrak{P}^\mu \dot{\psi}_\mu - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \left( \frac{2}{\alpha'} (x'^\mu x'_\mu + \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu) + 2i\bar{\psi}^\mu \mathcal{D}^0 \psi'_\mu \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \left( \frac{2}{\alpha'} (x'^2 + \dot{x}^2) - 2i(\psi_+ \cdot \psi'_+ + \psi_- \cdot \psi'_-) \right). \end{aligned}$$

Notons que les composantes fermioniques étant des nombres de GRASSMANN, leur intégrale n'est pas nulle comme on pourrait le penser de prime abord.

Finalement, discutons des conditions limites, nécessaires pour obtenir les équations du mouvement précédentes. Pour les coordonnées  $x^\mu$ , tout se passe comme précédemment. Concernant les fermions, il faut annuler

$$[\psi_+ \cdot \delta\psi_+ - \psi_- \cdot \delta\psi_-]_{\sigma=0}^{\sigma=l}.$$

**Cordes fermées :** On demande  $(\psi_+ \cdot \delta\psi_+ - \psi_- \cdot \delta\psi_-)(\sigma) = (\psi_+ \cdot \delta\psi_+ - \psi_- \cdot \delta\psi_-)(\sigma + l)$ , *i.e.*

$$\begin{cases} \psi_+^\mu(\sigma) = \pm \psi_+^\mu(\sigma + l), \\ \psi_-^\mu(\sigma) = \pm \psi_-^\mu(\sigma + l). \end{cases}$$

Condition qui apparaîtra aussi sur  $\delta\psi$ . Notons que pour les fermions, la périodicité absolue est désormais de deux tours, c'est pour eux le point central. Les conditions périodiques sont dites de RAMOND<sup>24</sup> tandis que les anti-périodiques sont dites de NEVEU-SCHWARZ<sup>25</sup>. L'invariance de POINCARÉ impose les mêmes conditions limites pour tout  $\mu$ , conditions qui transparaissent aussi sur la périodicité de  $\mathfrak{T}$ . En revanche, les choix pour  $\psi_+$  et  $\psi_-$  sont indépendants. Il y a donc quatre combinaisons possibles. Néanmoins, les deux cas où les conditions sont les mêmes pour  $\psi_+$  et  $\psi_-$  redonneront des bosons, *i.e.* le cas précédent.

24. Pierre RAMOND, physicien français (1943-).

25. André NEVEU, physicien français, normalien (1946-); John Henry SCHWARZ, physicien américain (1941-).

**Cordes ouvertes :** On demande  $(\psi_+ \cdot \delta\psi_+ - \psi_- \cdot \delta\psi_-)(0) = (\psi_+ \cdot \delta\psi_+ - \psi_- \cdot \delta\psi_-)(l) = 0$ , *i.e.*

$$\left| \begin{array}{l} \psi_+^\mu(0) = \pm\psi_-^\mu(0), \\ \psi_+^\mu(l) = \pm\psi_-^\mu(l). \end{array} \right.$$

Condition qui apparaîtra aussi sur  $\delta\psi$ . Les conditions limites peuvent être choisies indépendamment selon les directions puisque les conditions limites de DIRICHLET brisent déjà la symétrie de POINCARÉ. Par analogie, on garde la symétrie dans  $p + 1$  directions, dites de VON NEUMANN, avec, sans perte de généralité :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_+^\alpha(0) = \psi_-^\alpha(0), \\ \psi_+^\alpha(l) = \eta\psi_-^\alpha(l) \end{array} \right.$$

où  $\eta = \pm 1$ . Et pour les autres directions, dites de DIRICHLET :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_+^i(0) = -\psi_-^i(0), \\ \psi_+^i(l) = -\eta\psi_-^i(l) \end{array} \right.$$

De plus, on pourrait mixer les conditions limites de VON NEUMANN et DIRICHLET d'une part et de l'autre de la corde. Comme précédemment, le cas  $\eta = 1$  est appelé RAMOND tandis que le cas  $\eta = -1$  est appelé NEVEU-SCHWARZ.

## ii) QUANTIFICATION.

On commence par un développement en série d'oscillateurs. Le cas bosonique est le même que dans la deuxième section. Traitons le cas du fermion en distinguant les différentes situations. Pour cela, il suffit de résoudre les équations du mouvement. Notons

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{pour les conditions limites de RAMOND,} \\ \frac{1}{2} & \text{pour les conditions limites de NEVEU-SCHWARZ.} \end{cases}$$

**Cordes fermées :** On peut alors écrire le développement sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \phi} \bar{\beta}_r^\mu e^{-2i\pi r \frac{\tau + \sigma}{l}}, \\ \psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \phi} \beta_r^\mu e^{-2i\pi r \frac{\tau - \sigma}{l}}. \end{array} \right.$$

La réalité des éléments du spineur de MAJORANA assure  $(\beta_r^\mu)^* = \beta_{-r}^\mu$  et de même avec les barres.

**Cordes ouvertes :** Pour les conditions de VON NEUMANN, on a :

$$\psi_\pm^\mu(\sigma, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{l}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \phi} \beta_r^\mu e^{-2i\pi r \frac{\tau \pm \sigma}{l}}.$$

Et pour celles de DIRICHLET :

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \pm \sqrt{\frac{\pi}{l}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \phi} \beta_r^\mu e^{-2i\pi r \frac{\tau - \sigma}{l}}.$$

La réalité des éléments du spineur de MAJORANA assure  $(\beta_r^\mu)^* = \beta_{-r}^\mu$  et de même avec les barres.



Notons que les coefficients  $\beta$  sont désormais des nombres de GRASSMANN et donc anticommulent. On passe en opérateurs quantiques et admet la relation de commutation des coefficients de FOURIER :

$$\left\{ \widehat{\beta}_r^\mu, \widehat{\beta}_s^\nu \right\}_{\mathfrak{Q}} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s} \text{id}.$$

On a de même avec les coefficient barrés.

Comme pour la corde bosonique, on se place dans le cône de lumière, en posant  $x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 \pm x^1)$  et  $\psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^0 \pm \psi^1)$ . Dans le cas précédent, les invariance restantes de la jauge conforme nous permettait de choisir

$$x^+ = \frac{2\pi\alpha'}{l} p^+ \tau.$$

Ici, on peut faire de même, et on admet de plus que l'on peut aussi, dans la jauge super-conforme, choisir

$$\psi^+ = 0.$$

On indexera par  $i$  les coordonnées transverses, *i.e.*  $\llbracket 2, d-1 \rrbracket$ . Posons les opérateurs nombre des coordonnées transverses :

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{N}_{\text{tr}} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \widehat{\alpha}_{-n}^i \widehat{\alpha}_n^i, \\ \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\phi_n \widehat{\beta}_{-n}^i \widehat{\beta}_n^i. \end{array} \right.$$

On pose de même pour les coefficients barrés. De façon analogue au cas bosonique, l'Hamiltonien peut alors s'écrire sous la forme :

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{\pi\alpha'}{l} \widehat{p}^i \widehat{p}_i + \frac{2\pi}{l} \left( \widehat{N}_{\text{tr}} + \widehat{\bar{N}}_{\text{tr}} + \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + \widehat{\bar{\mathfrak{N}}}_{\text{tr}} + A + \bar{A} \right)$$

pour les cordes fermées.

Pour les cordes ouvertes, en notant  $\mathcal{N} = \{i \in \llbracket 2, d-1 \rrbracket\}$ , la condition limite selon  $i$  est de VON NEUMANN.} et  $\mathcal{D}$  le complémentaire, on a :

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{\pi\alpha'}{l} \sum_{i \in \mathcal{N}} \widehat{p}^i \widehat{p}_i + \frac{1}{4\pi\alpha' l} \sum_{i \in \mathcal{D}} (\widehat{x}_1^i - \widehat{x}_0^i)^2 + \frac{\pi}{l} \left( \widehat{N}_{\text{tr}} + \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + A \right).$$

La partie bosonique est identique au cas précédent. On a introduit comme avant la constante  $A$  pour palier au défaut de commutation dans les termes du produit. On peut les calculer à l'aide d'une régularisation  $\zeta$ . Dans le cas des conditions de RAMOND, on a :

$$A = \bar{A} = \frac{d-2}{2} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} n - \sum_{r \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} r \right) = \frac{d-2}{2} \left( -\frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) = -\frac{d-2}{16}.$$

La valeur de la seconde somme peut se comprendre en le sens où l'on peut écrire :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n + \sum_{n \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} n = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} n \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( n + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} n = \frac{1}{24}.$$

Bien entendu, ceci n'est pas une preuve, juste une idée, et une justification plus rigoureuse nécessiterait plus de travail sur les régularisations  $\zeta$ . Dans le cas des conditions de NEVEU-SCHWARZ, on a :

$$A = \bar{A} = \frac{d-2}{2} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} n - \sum_{r \in \mathbb{N}} r \right) = 0.$$

Comme avant, les contraintes peuvent être résolues explicitement dans le cône lumière. La contrainte du tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$\partial_{\pm} x^{-} = \frac{l}{4\pi P^{+}} \left( \frac{2}{\alpha'} \partial_{\pm} x^i \partial_{\pm} x^i + i \psi_{\pm}^i \partial_{\pm} \psi_{\pm}^i \right).$$

Tandis que la contrainte liée au gravitino s'écrit :

$$\psi_{\pm}^{-} = \frac{l}{\pi \alpha' P^{+}} \psi_{\pm}^i \partial_{\pm} x^i.$$

Aussi, les seuls degrés de libertés sont les  $x^i$  et  $\psi^i$ . Ces contraintes permettent aussi d'écrire comme précédemment :

$$P^{-} = \frac{l}{2\pi \alpha' P^{+}} \mathcal{H}.$$

Et on obtient de plus la conditions de niveaux pour les cordes fermées :

$$N_{\text{tr}} + \mathfrak{N}_{\text{tr}} = \bar{N}_{\text{tr}} + \bar{\mathfrak{N}}_{\text{tr}}.$$

On constate donc que tout se passe comme dans le cas de la corde bosonique en ajoutant le terme fermionique.

Enfin, on peut exprimer l'opérateur de masse. Pour les cordes fermées, on obtient :

$$\alpha' \hat{m}^2 = 2 \left( \hat{N}_{\text{tr}} + \hat{\bar{N}}_{\text{tr}} + \hat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + \hat{\bar{\mathfrak{N}}}_{\text{tr}} + A + \bar{A} \right).$$

Et pour les cordes ouvertes :

$$\alpha' \hat{m}^2 = \hat{N}_{\text{tr}} + \hat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + A + \frac{1}{4\pi^2 \alpha'} \sum_{i \in \mathcal{D}} (\hat{x}_1^i - \hat{x}_0^i)^2.$$

Observons les cordes ouvertes avec conditions de VON NEUMANN et RAMOND. Le niveau fondamental a une masse  $\alpha' \hat{m}^2 = A$ . Le suivant a alors, grâce à  $\beta_{\frac{1}{2}}$  une masse  $\alpha' \hat{m}^2 = \frac{1}{2} + A$ . Comme précédemment, pour des raisons de symétries non détaillées, on souhaite qu'il soit de de masse nulle. D'où

$$A = -\frac{1}{2} \implies d = 10.$$

Pour le cas de NEVEU-SCHWARZ, on peut montrer que c'est cohérent que c'est alors le fondamental qui a un défaut de symétrie. Le situation est semblable dans les autres cas et il est possible de démontrer que l'on a alors une théorie cohérente en dimension 10.

### iii) FONCTION DE PARTITION.

On souhaite calculer  $\mathfrak{z}$  dans la cas de la corde fermée pour une interaction toroïdale. On a désormais :

$$\mathfrak{z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\tau_2^4} \sum_{\text{état sans contrainte } |\xi\rangle} q^{\langle \xi | (\hat{N}_{\text{tr}} + \hat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + A) | \xi \rangle} \bar{q}^{\langle \xi | (\hat{\bar{N}}_{\text{tr}} + \hat{\bar{\mathfrak{N}}}_{\text{tr}} + \bar{A}) | \xi \rangle}$$

La partie bosonique est similaire à l'étude de la troisième section, avec seulement un changement de dimension, 10 au lieu de 26. Notamment, la constante d'ordre associée n'est plus  $-1$  mais  $-\frac{d-2}{24} = -\frac{1}{3}$ . Calculons donc le cas fermionique. Il faut distinguer différentes situations, selon que l'on est dans les conditions de RAMOND ou NEVEU-SCHWARZ dans chacune des deux directions du tore. La direction selon  $\tau$

nécessitant, pour le choix des conditions de RAMOND, d'ajouter un facteur  $(-1)^F$  où  $F$  est le nombre de fermions, afin d'assurer la bonne périodicité.

Il faudra donc sommer sur tous les configurations possibles, *i.e.* les différentes fonctions de partitions. Notons de plus que comme il s'agit de fermions, que le principe de PAULI<sup>26</sup> s'applique.

On admettra le résultat suivant sur les formes modulaires, que l'on a pas démontré dans le premier chapitre :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau + 2i\pi n \alpha} = \prod_{m \in \mathbb{N}^*} (1 - q^m) \left(1 + q^{m-\frac{1}{2}} e^{2i\pi \alpha}\right) \left(1 + q^{m-\frac{1}{2}} e^{-2i\pi \alpha}\right).$$

On rappelle que l'on avait défini dans la quatrième section du premier chapitre :

$$\begin{cases} \theta_{00}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}, \\ \theta_{01}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi n^2 z}, \\ \theta_{10}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi (n+\frac{1}{2})^2 z}. \end{cases}$$

Aussi, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \theta_{00}(\tau) = \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - q^m) \left(1 + q^{m+\frac{1}{2}}\right)^2, \\ \theta_{01}(\tau) = \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - q^m) \left(1 - q^{m+\frac{1}{2}}\right)^2, \\ \theta_{10}(\tau) = q^{\frac{1}{8}} \prod_{m \in \mathbb{N}^*} (1 - q^m) (1 + q^m)^2. \end{cases}$$

**Conditions de RAMOND/NEUVEU-SCHWARZ :** On a alors une contribution

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + \frac{1}{3}.$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{10} &= q^{\frac{1}{3}} \text{Tr} \left( q^{\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}}} \right) \\ &= q^{\frac{1}{3}} \text{Tr} \left( q^{\sum_{m \in \mathbb{N}} m \beta_{-m}^i \beta_m^i} \right) \\ &= q^{\frac{1}{3}} \prod_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{N_m=0,1} q^{m N_m} \right)^8 \\ &= q^{\frac{1}{3}} \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 + q^m)^8 \\ &= \frac{\theta_{10}^4}{\eta^4}. \end{aligned}$$

**Conditions de RAMOND/RAMOND :** On a alors une contribution

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} + \frac{1}{3}.$$

---

26. Wolfgang PAULI, physicien autrichien puis suisse (1900-1958).

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_{11} &= q^{\frac{1}{3}} \text{Tr} \left( q^{\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}}} (-1)^F \right) \\
&= q^{\frac{1}{3}} \text{Tr} \left( q^{\sum_{m \in \mathbb{N}} m \beta_{-m}^i \beta_m^i} (-1)^F \right) \\
&= q^{\frac{1}{3}} \prod_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{N_m=0,1} q^{m N_m} (-1)^{N_m} \right)^8 \\
&= q^{\frac{1}{3}} \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - q^m)^8 \\
&= 0
\end{aligned}$$

à cause du terme  $m = 0$ .

**Conditions de NEVEU-SCHWARZ/RAMOND :** On a alors une contribution

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} - \frac{1}{6}.$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_{01} &= q^{-\frac{1}{6}} \text{Tr} \left( q^{\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}}} (-1)^F \right) \\
&= q^{-\frac{1}{6}} \text{Tr} \left( q^{\sum_{m \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} m \beta_{-m}^i \beta_m^i} (-1)^F \right) \\
&= q^{-\frac{1}{6}} \prod_{m \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} \left( \sum_{N_m=0,1} q^{m N_m} (-1)^{N_m} \right)^8 \\
&= q^{-\frac{1}{6}} \prod_{m \in \mathbb{N}} \left( 1 - q^{m + \frac{1}{2}} \right)^8 \\
&= \frac{\theta_{01}^4}{\eta^4}
\end{aligned}$$

**Conditions de NEVEU-SCHWARZ/NEVEU-SCHWARZ :** On a alors une contribution

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{tr}} - \frac{1}{6}.$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_{00} &= q^{-\frac{1}{6}} \text{Tr} \left( q^{\widehat{\mathfrak{H}}_{\text{tr}}} \right) \\
&= q^{-\frac{1}{6}} \text{Tr} \left( q^{\sum_{m \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} m \beta_{-m}^i \beta_m^i} \right) \\
&= q^{-\frac{1}{6}} \prod_{m \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} \left( \sum_{N_m=0,1} q^{m N_m} \right)^8 \\
&= q^{-\frac{1}{6}} \prod_{m \in \mathbb{N}} \left( 1 + q^{m + \frac{1}{2}} \right)^8 \\
&= \frac{\theta_{00}^4}{\eta^4}
\end{aligned}$$

De plus, des phases peuvent être ajoutés aux différentes composantes, ce qui apparait naturellement avec la méthode de l'intégrale de chemin. On peut aussi les retrouver en demandant à ce que les composantes chirales et achirales soient toutes deux des invariants modulaires. Cela impose en fait un facteur  $-1$  aux fermions, *i.e.* avec des conditions limites non-identiques. On obtient alors la fonction de partition pour la composante chirale :

$$\mathfrak{z}_c = \frac{1}{\eta^8} (\mathfrak{z}_{00} - \mathfrak{z}_{10} - \mathfrak{z}_{01} + \mathfrak{z}_{11}).$$

Ainsi, la fonction de partition est :

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{\tau_2^4} \frac{|\theta_{00}^4 - \theta_{01}^4 - \theta_{10}^4|^2}{|\eta|^{24}}.$$

Or, d'après l'identité de JACOBI démontré dans le premier chapitre,  $\theta_{00}^4 - \theta_{01}^4 - \theta_{10}^4 = 0$ . Aussi, la fonction de partition est identiquement nulle ! Physiquement, cela représente la super-symétrie entre bosons et fermions puisque cette fonction de partition en réalise la différence.

# CONCLUSION.

CE mémoire s'achève. Nous avons introduit les formes modulaires et étudié leurs propriétés, avant de résoudre, grâce à leur aide, le problème de l'empilement compact de sphères en dimension huit. Dans un deuxième temps, nous avons présenté une introduction à la théorie des cordes et observé les premières constructions et premiers résultats de ce modèle. Nous avons aussi, au passage, vu les premières apparitions de l'étude des formes modulaires dans la théorie des cordes, à l'instar de l'utilisation de l'identité de JACOBI pour expliciter la supersymétrie de la théorie des supercordes.

MERCI d'avoir pris le temps de cette lecture. J'espère que ce mémoire vous aura intéressé. En cas d'erreur ou faute, vous pouvez me contacter<sup>1</sup> afin que je les corrige. Pour finir, je remercie de nouveau mes encadrants, Quentin GUIGNARD pour les mathématiques et Hervé PARTOUCHE pour la physique.

Baptiste COQUINOT.

---

1. Adresse email : [baptiste.coquinot@ens.fr](mailto:baptiste.coquinot@ens.fr).

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Neal KOBLITZ, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, partie 3.
- [2] Maryna S. VIAZOVSKA, *The sphere packing problem in dimension 8*, arXiv :1603.04246.
- [3] H. COHN et N. ELKIES, *New upper bounds on sphere packings*, *Annals of Mathematics*, 157 (2003), 689-714.
- [4] Henryk IWANIEC et Emmanuel KOWALSKI. *Analytic number theory*, chapitre 20.
- [5] Ralph BLUMENHAGEN, Dieter LÜST et Stefan THEISEN, *Basic Concepts of String Theory*.
- [6] Joseph POLCHINSKI, *String theory : An introduction to the bosonic string*.
- [7] Elias KIRITSIS, *String Theory in a Nutshell*.