



Physique pour tous

Séance 11 – Physique Einsteinienne I

Lior Benizri, Joaquin Bermejo, Baptiste Coquinot

Septembre 2023

École Normale Supérieure de Paris

- Q : Pourquoi parler de relativité ?
- R : Parce que c'est cool !
- Q : Pourquoi sous le prisme historique ?
- R : Pour comprendre les défis conceptuels majeurs à laquelle la théorie vient répondre.
- Notre approche : partir de théories existantes, postuler la cohérence interne absolue du système qu'on essaie de décrire, et essayer de résoudre les contradictions qui émergent.
- La relativité est ainsi née de la résolution des contradictions entre mécanique newtonienne et électromagnétisme.

Et comme l'a très justement dit un collègue, Victor F.,

Einstein, c'était pas la moitié d'un trou de balle.

J'exhorte l'audience à poser des questions.

Posez des questions !

1. Avant Einstein
2. Einstein : les fondements
 - 2.1 Contraction, Dilatation.
 - 2.2 Intervalle d'espace-temps.
 - 2.3 Transformations de Lorentz.
3. Les diagrammes d'espace-temps
 - 3.1 Les diagrammes.
 - 3.2 Version interactive.
 - 3.3 Chronologie et Causalité.
4. Masse et Energie
5. Paradoxes ?
 - 5.1 Paradoxe des jumeaux.
 - 5.2 Paradoxe d'Ehrenfest.
 - 5.3 Paradoxe de Bell.

Avant Einstein : Le monde selon Newton, Maxwell & co

Axiomes de la théorie newtonienne

Principe de relativité

Les lois physiques sont identiques dans tous les référentiels inertiels.

- Cela suppose bien sûr l'existence d'une telle classe de référentiels.
- Quels sont ces référentiels ? Il faudra attendre la relativité générale.

Caractère absolu du temps

Deux observateurs en MRU l'un par rapport à l'autre mesurent des intervalles de temps égaux.

Corollary (Loi d'addition des vitesses)

$$v_R = v_{R'} + v_{R'/R}$$

- C'est une conséquence de la loi de transformation des coordonnées.
- L'axiome et son corollaire nous semblent parfaitement intuitifs.

Ondes électromagnétiques

Il existe des champs électriques et magnétiques. Le mouvement d'une charge électrique génère un champ magnétique. Les oscillations de ces champs donnent naissance à une onde électromagnétique : la lumière. Celle-ci se propage dans le vide à une vitesse $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

- Cet axiome est en **contradiction flagrante** avec les précédents.
- Considérons une onde qui se propage à vitesse *finie* dans le **vide**.
- Vu du référentiel \mathcal{R} , elle possède une célérité $c_{\mathcal{R}}$. Vue de \mathcal{R}' , une célérité $c'_{\mathcal{R}} = c_{\mathcal{R}} + v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \neq c_{\mathcal{R}}$.
- La vitesse de l'onde dépend du référentiel, ce qui contredit la relativité !
- Il faut remettre en cause nos hypothèses : soit la lumière ne se propage pas dans le vide mais dans un milieu (i), soit le principe de relativité est faux (ii), soit le temps n'est pas absolu (iii) - la loi de transformation des coordonnées est erronée.

- Historiquement, les physiciens ont cherché pendant un demi-siècle à contredire (i). Ils n'aimaient pas l'idée qu'une onde puisse se propager dans le vide...
- Ils ont ressuscité des vieux démons, imaginant l'espace rempli d'une substance dite *éther luminifère*, à travers lequel les champs électromagnétiques se propagent.
- Q : Mais comment démontrer l'existence de l'éther ?
- R : La Terre est en mouvement par rapport à l'éther : il suffit donc de mesurer la vitesse de la lumière dans des directions longitudinales et transverses au mouvement de la Terre.
- Le problème : l'expérience de Michelson-Morely, censée démontrer l'existence de l'éther, échoue lamentablement.

- Des théories de plus en plus farfelues voient alors le jour pour concilier les résultats des expériences avec l'existence de l'éther.
- Lorentz écrit les bonnes équations de transformation des coordonnées le premier, mais son interprétation est totalement erronée.
- Il suggère que, comme la rigidité des matériaux est assurée par des interactions électromagnétiques, ceux-ci se contractent réellement lorsqu'ils sont en mouvement par rapport à un référentiel inertiel absolu défini par l'éther.
- Cette intuition était déjà présente chez FitzGerald, et Larmor avait obtenu des équations similaires deux ans plus tôt.
- Dans les années qui suivent, Poincaré perfectionne l'aspect technique, et utilise le premier l'expression *principe de relativité*.

Peu nous importe que l'éther existe réellement, c'est l'affaire des métaphysiciens ; l'essentiel pour nous c'est que tout se passe comme s'il existait et que cette hypothèse est commode pour l'explication des phénomènes. Après tout, avons-nous d'autre raison de croire à l'existence des objets matériels ? Ce n'est là aussi qu'une hypothèse commode ; seulement elle ne cessera jamais de l'être, tandis qu'un jour viendra sans doute où l'éther sera rejeté comme inutile.

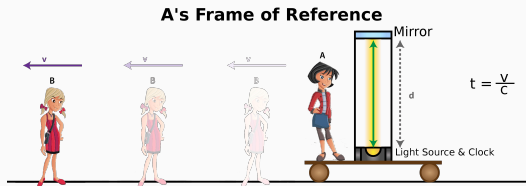
– La Science et l'hypothèse, chapitre 12, H. Poincaré

Un génie qui tire la langue :

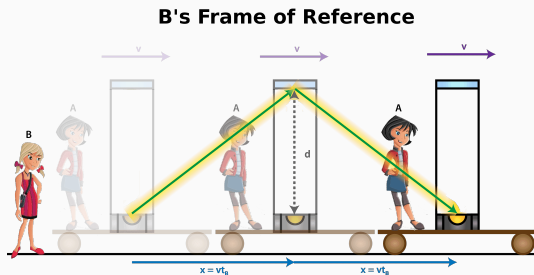
Les fondements

- Entre en scène un jeune ingénieur au bureau des brevets de Berne.
- En un an, il publie quatre papiers révolutionnaires : il déclenche la ruée vers la nouvelle physique. Du jamais vu depuis Newton en 1666 !
- Depuis son adolescence, il se pose la question suivante : *Qu'est-ce qui se passe si je chevauche un rayon de lumière ?*
- Il comprend qu'il faut prendre les prédictions de Maxwell au sérieux par i) asymétrie électro/magnétique ii) expériences.
- Il comprend l'importance du principe de relativité.
- Il en conclut qu'il faut remettre en cause le caractère absolu du temps.
- Il en conclut également que la vitesse de la lumière est une vitesse limite : elle change de statut !

Horloge lumineuse



$$t_A = d/c$$



$$c^2 t_B^2 = v^2 t_B^2 + d^2$$
$$\Rightarrow t_B = \frac{t_A}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Figure 1 – A lightclock

Le feu, la fureur, et la simultanéité

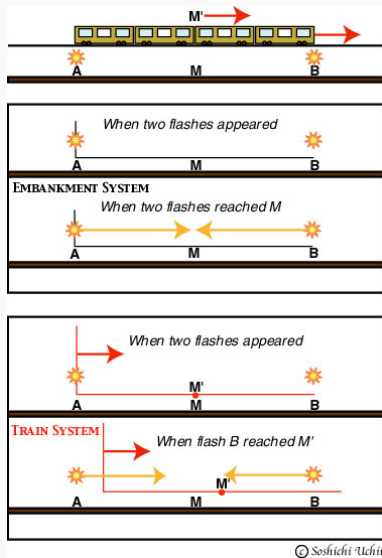


Figure 2 – An intuitive understanding of the relativity of simultaneity.

Contraction des longueurs

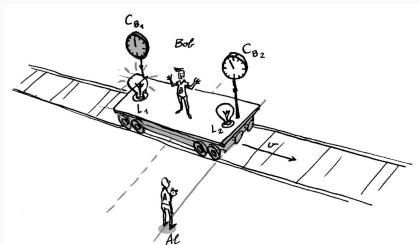


Figure 3 – Al démarre le chrono quand la première extrémité du train passe, et l'arrête quand la seconde passe.

$$L_{Al} = ct_{Al} = \overbrace{ct_{Bob}}^{L_{Bob}} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

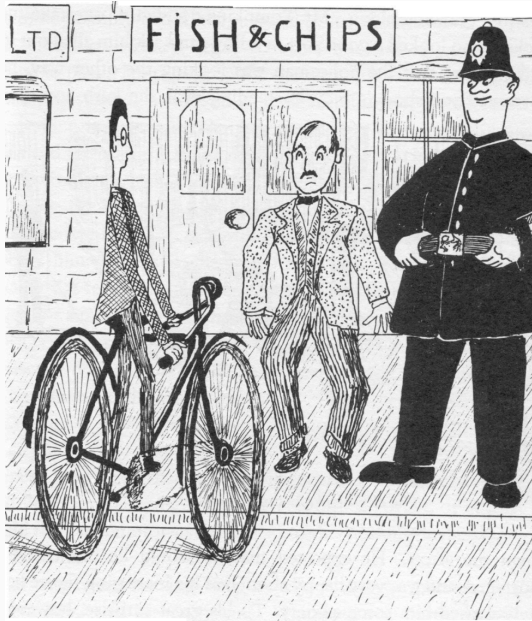
$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

L_0 est la longueur de l'objet lorsqu'il est mesuré au repos : on parle de longueur propre.



Figure 4 – La contraction des longueurs à l'oeuvre.

Mr Tompkins



L'intervalle d'espace-temps

- On caractérise un *événement* par l'instant t et le lieu \vec{x} où il se produit.
- Soit un signal lumineux qui se propage depuis un événement de coordonnées (t_1, \vec{x}_1) et (t'_1, \vec{x}'_1) dans des référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .
- Posons qu'un second événement est le point d'arrivée du signal, de coordonnées (t_2, \vec{x}_2) dans \mathcal{R} et (t'_2, \vec{x}'_2) dans \mathcal{R}' .
- Dans les deux cas, la constance de la vitesse de la lumière implique que la quantité $s_{12}^2 := -c^2(t_2 - t_1)^2 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 = 0$.
- Autrement dit, si s_{12} est nul dans un référentiel donné, il est nul dans tous les référentiels.
- On peut montrer que cet *intervalle d'espace-temps* :

$$(\Delta s)^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2$$

est un *invariant*.

- On appelle *temps propre* $\tau = -\Delta s/c$ l'intervalle de temps entre deux événements mesuré dans un référentiel au repos par rapport à eux.

Transformations de Lorentz (2D)

- On montre aisément que les seules transformations de coordonnées qui préservent l'intervalle d'espace-temps sont les translations, les rotations dans l'espace et les transformations dites *de Lorentz* :

$$\begin{cases} ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi \\ x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi \end{cases}$$

Où $\cosh \psi = \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ et $\sinh \psi = \gamma v/c = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

- Pour comprendre ce que cela signifie, fixons une tranche de l'espace-temps, à un instant t . L'intervalle se réduit à $s_{12}^2 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2$. Autrement dit, il s'agit d'une mesure des longueurs dans l'espace.
- Les transformations qui préservent cet intervalle, c'est-à-dire qui préservent les longueurs, sont les rotations dans l'espace.
- Ainsi, les transformations de Lorentz sont l'équivalent des rotations dans l'espace mais dans une géométrie différente, dite *Minkowskienne*.

Addition des vitesses

- Est-ce que les formules qu'on a définies rendent bien compte de la constance de la vitesse de la lumière ?
- Par définition ! On a :

$$v_x = \frac{v'_x + w_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{1 + \frac{v'_x w_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{c^2}}; \quad \begin{cases} v_y = \frac{v'_y/\gamma}{1 + \frac{v'_x w_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{c^2}} \\ v_z = \frac{v'_z/\gamma}{1 + \frac{v'_x w_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{c^2}} \end{cases}$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

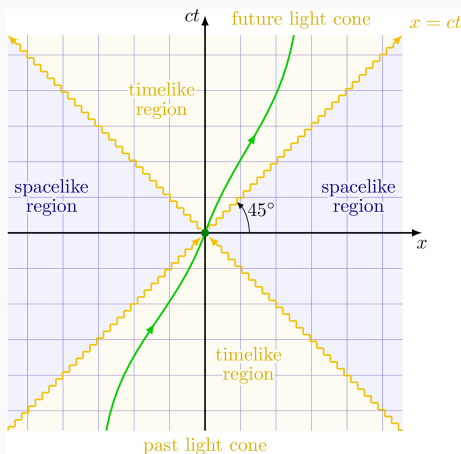
- En particulier, si $\vec{v} = c \cdot \vec{e}_x$, alors :

$$v'_x = \frac{c + w}{1 + \frac{c \cdot w}{c^2}} = c; \quad v'_y = 0 = v'_z$$

- Même exercice pour $v = c$, $v_x = 0$.

Minkowski et ses diagrammes

Diagrammes d'espace-temps I



- $s^2 < 0 \Leftrightarrow c^2 t^2 > x^2$: intervalle de genre temps.
- $s^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 t^2 = x^2$: intervalle de genre lumière.
- $s^2 > 0 \Leftrightarrow c^2 t^2 < x^2$: intervalle de genre espace.

Espace-temps $\equiv \mathbb{R}^4$ équipé du produit scalaire $x \cdot y = -x_0 y_0 + \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Diagrammes d'espace-temps II

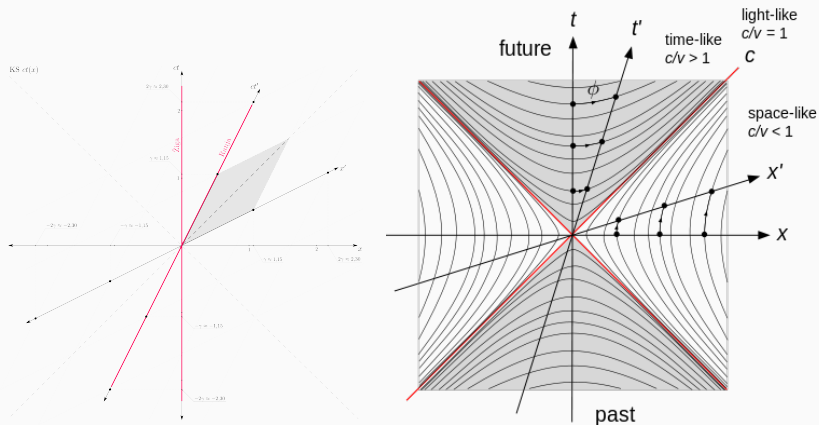


Figure 6 – A gauche, les axes après une transformation. A droite, des lignes le long desquels les événements se déplacent lors d'un boost.

Revisiter les phénomènes relativistes de façon interactive :
<https://alexonscience.com/projects/spacetimeglobe/>

Chronologie et Causalité

- La simultanéité n'est pas une notion bien définie en relativité et la chronologie semble ainsi pouvoir être inversée... Comment cela est-il compatible avec le principe de causalité ?
- Par exemple, il semble évident qu'il ne peut exister de référentiel dans lequel Hitler se suicide avant d'avoir enclenché la guerre. Pourquoi ?
- Idée clé : on ne peut inverser l'ordre dans lequel des événements se produisent ssi ils sont séparés par un intervalle de genre espace.
- Mathématiquement, les transformations de Lorentz préservent les régions définies par les premières bissectrices qui définissent les régions causales.
- Physiquement, on ne peut inverser l'ordre d'événements que si la lumière n'a pas eu le temps d'effectuer le trajet entre ceux-ci, ce qui proscrit toute violation de la causalité.

Un exemple que vous ne verrez nulle part ailleurs

- Exemple extrême : l'intrication quantique dont Joaquin vous a parlé.
- Imaginons deux particules dont les spins sont intriqués, l'une sur la Terre et l'autre sur la lune.
- Si l'un est mesuré up, l'autre est nécessairement down et vice-versa.
- Josh mesure celle sur la Terre, et obtient un spin up.
- Une demi-seconde plus tard, Chloé mesure le spin down sur la Lune.
- L'intervalle séparant ces phénomènes étant de genre espace, la chronologie peut être inversée par un boost.
- Autrement dit, on ne peut pas affirmer que c'est Josh qui effondre la fonction d'onde.
- Le système quantique est véritablement *non-séparable*.

Une formule célèbre s'il en est.

- Nous sommes à présent en mesure de comprendre et même de démontrer la formule la plus célèbre au monde :

$$E = mc^2$$

- Soit un un corps au repos qui émet un rayonnement d'énergie R_1 .
- Q : L'énergie est conservée au cours du processus. D'où provient donc l'énergie émise? Réponse plus bas...
- On effectue un boost à vitesse v , de sorte que ce corps a une énergie cinétique K_1 dans notre référentiel.
- A présent, inversons le cours des événements : on commence par le boost à vitesse v . On note l'énergie cinétique du corps K_2 .
- On observe ensuite le rayonnement dans ce second référentiel. Le corps perd une énergie R_2 . Intuitivement on s'attend à $R_1 = R_2$.

Effet Doppler Relativiste

- Soit une source en mouvement transverse par rapport à la lumière émise.
- Classiquement, les fronts d'onde ne sont pas décalés, car le mouvement est transverse.
- Cependant, il y a un effet dû à la dilatation du temps. Les fréquences observées dépendent du référentiel. On a :

$$f_S = f_0 \cdot \gamma$$

- L'énergie émise satisfait la même équation :

$$R_2 = R_1 \cdot \gamma$$

- Une meilleure dérivation est présente dans le premier article de 1905.

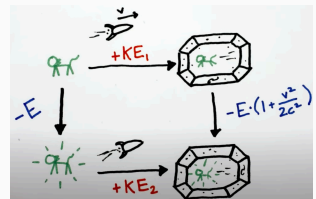
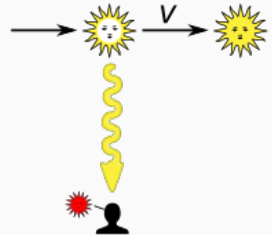


Figure 7 – Notre stratégie.

Masse=Energie II

- Donc, $K_2 \neq K_1$. On a :

$$K_2 - K_1 = R_1 \cdot (\gamma - 1)$$

- Le corps possédant la même vitesse dans les deux cas, de quoi peut donc dépendre $K_2 - K_1$?
- Pour le voir, effectuons un calcul de premier ordre i.e. supposons que $v/c \ll 1$. On a :

$$\gamma - 1 \simeq \frac{v^2}{2c^2}$$

- De plus, en mécanique Newtonienne, l'énergie cinétique est donnée par $\frac{1}{2}mv^2$, d'où $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta mv^2$.
- On en déduit que :

$$\Delta m = \Delta E/c^2$$

$$E = mc^2$$

La masse d'un corps est une mesure de l'énergie qu'il contient, même s'il n'émet pas de lumière, à travers la relation de premier ordre $E = mc^2$.

Energie, masse et accélération

- La formule complète est donnée par :

$$E = mc^2/\gamma$$

- Au premier ordre,

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

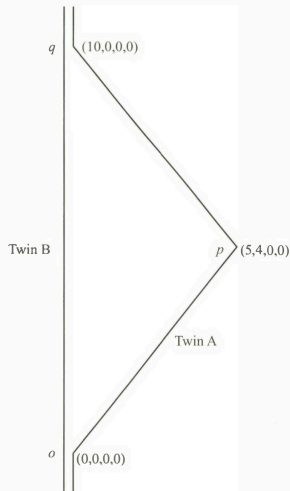
- Lorsque $v \rightarrow c$, $E \rightarrow \infty$. Autrement dit, il faut fournir une énergie infinie pour accélérer un corps **massif** jusqu'à la vitesse de la lumière : c'est impossible !
- Une *vieille* façon de décrire ce phénomène est d'attribuer une masse inertielle (fictive) $m_I = m/\gamma$ au corps considéré.
- *Que se passe-t-il lorsque l'on chevauche un rayon de lumière ?* Nos investigations indiquent que la question *n'a pas de sens*. En effet, il est impossible d'accélérer une horloge ou une règle jusqu'à cette vitesse.

- Avec la relativité restreinte, on comprend mieux le lien entre électricité et magnétisme.
- Les sources élémentaires du champ électrique sont les charges électriques.
- Les unités élémentaires du champ magnétiques sont les charges électriques en mouvement.
- Mais le mouvement est relatif ! Selon les référentiels, un champ électrique peut devenir un champ magnétique et vice-versa ! C'est l'origine du phénomène d'induction.

Confusions...

Paradoxe des jumeaux

- Prenons deux jumeaux âgés de 25 ans : Carlos et Javier. Carlos s'envole pour des contrées lointaines à une vitesse $v = 0,8c$ tandis que Javier reste sur Terre.
- Après 5 ans de trajet, Carlos fait demi-tour, avec la même vitesse v .
- Pour Javier, il y a dilatation du temps et Carlos doit revenir plus vieux.
- Mais le tout n'est-il pas symétrique ?
- Non ! Carlos doit *accélérer* pour faire demi-tour, et cette accélération brise la symétrie.



Paradoxe des jumeaux

- Calculons le temps propre de chacun pour confirmer cette intuition :

$$\tau_{Oq} = 10$$

$$\tau_{Op} + \tau_{pq} = 6$$

- On en déduit que si Javier a à présent 35 ans, Carlos n'en a que 31.
- Cette application amusante des principes de la relativité a généré beaucoup de confusion !
- Mais rassurez-vous, il n'y a aucun paradoxe !

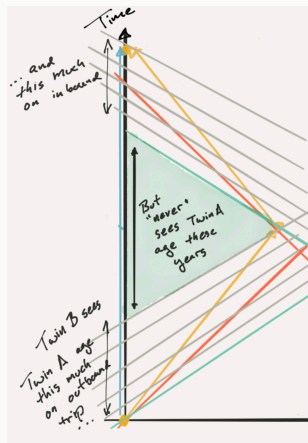


Figure 8 – La région coloriée correspond au temps écoulé chez Javier sans équivalent chez Carlos.

Paradoxe d'Ehrenfest

- Considérons une roue au repos de rayon R .
- Accélérons là jusqu'à ce qu'elle tourne à vitesse constante v .
- Les rayons de la roue étant perpendiculaire au mouvement, leur longueur n'est pas modifiée, $R' = R$.
- Par contre, le périmètre de la roue doit diminuer par contraction des longueurs $\Rightarrow R' \lesssim R$.
- Cette contradiction a été soulevée par Ehrenfest et résolu par Einstein.

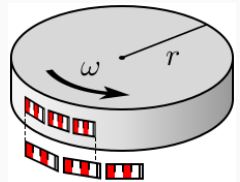


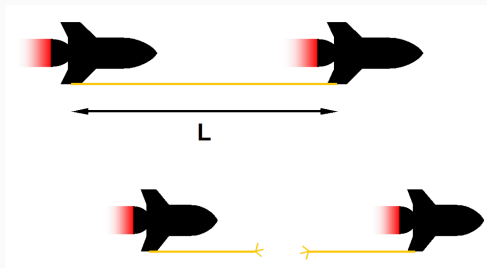
Figure 9 – Une roue en rotation à une vitesse approchant c .

Rigidité de Born

En physique relativiste, on dit qu'un matériau est rigide (de Born) si sa longueur propre est constante. Un matériau ne peut être accélérée à des vitesses relativistes en maintenant sa rigidité.

Paradoxe de Bell I

- Considérons deux fusées au repos dans le référentiel \mathcal{R} .
- A $t = 0$, elles accélèrent identiquement, jusqu'à une vitesse v .
- En vertu de la contraction des longueurs, elles se contractent du point de vue de \mathcal{R} .
- Par contre, la distance qui les sépare reste la même qu'à $t = 0$.
- Imaginons à présent qu'une corde relie les deux fusées.
- La corde aussi se contracte. Sa longueur est donc inférieure à la distance qui sépare les fusées ! Que se passe-t-il ?



Paradoxe de Bell II

- R : La corde rompt ! Q : Mais quelle force peut donc rompre la corde ?
- R : La contraction des distances est un véritable effet physique, qui influe sur les forces électromagnétiques qui assure la rigidité du matériau, puisqu'elle modifié la densité de charges, etc.
- Q : Mais quelle force peut donc agir dans le référentiel de la fusée ?
- Plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}' de la fusée après stabilisation de sa vitesse. Dans ce référentiel,

$$t_1 = -vL/c^2; \quad t_2 = 0$$

Autrement dit, les deux fusées n'accélèrent pas simultanément ! La première démarre en premier, exerçant ainsi une tension importante dans la corde qui la rompt.

Conclusion

- On a vu que la relativité restreinte naît de la contradiction entre mécanique newtonienne et de l'électromagnétisme.
- Elle remet en questions nos conceptions du temps et de l'espace, et prédit un grand nombre de phénomènes contre-intuitifs.
- On appelle groupe de Poincaré l'ensemble des translations, rotations, et transformations de Lorentz dans l'espace-temps.
- Une condition de viabilité pour toute théorie de physique fondamentale est son invariance sous ce groupe de Poincaré.
- *Tout n'est pas relatif* en relativité. La théorie est même construite autour des invariants sous les transformations de Lorentz.

Quelques suggestions de lecture :

- *Subtle is the Lord : The Life and Science of Albert Einstein*, d'Abraham Pais.
- Minute Physics : chaîne de vulgarisation avec une série d'excellents vidéos sur la relativité restreinte.
- Expérimenter avec Alex's spacetime globe.
- Landau & Lifshitz : Tome II (Théorie des champs).
- *The Special and General Theory of Relativity*, par A. Einstein.

Merci de nous avoir écoutés !