



# Physique pour tous

## Séance 12 – Physique Einsteinienne II

---

Lior Benizri

Décembre 2023

École Normale Supérieure de Paris

- Q : Pourquoi parler de relativité générale ?
- R : Parce que, dans les mots de l'immense Landau, c'est *sûrement la plus belle des théories physiques existantes*.
- Notre approche : partir de théories existantes, postuler la cohérence interne absolue du système qu'on essaie de décrire, et essayer de résoudre les contradictions qui émergent.
- La relativité est ainsi née de la résolution des contradictions entre gravitation newtonienne et relativité restreinte.

# Le programme : théorie de la gravitation

1. Le chemin vers la théorie
  - 1.1 Le Problème
  - 1.2 Le Principe d'équivalence.
  - 1.3 Conséquences du PE.
2. La théorie
  - 2.1 Géométriser l'espace-temps.
  - 2.2 Outils mathématiques.
  - 2.3 Les équations d'Einstein.
  - 2.4 Couronnement.
3. Applications
  - 3.1 Ondes gravitationnelles.
  - 3.2 Trous Noirs.
  - 3.3 Cosmologie.
4. Vers l'infini et au delà ?

**Le chemin vers la théorie :**  
**Gravity... is working against me**

---

# Localité, localité, localité

- La théorie de Newton est non-locale : elle prédit la propagation instantanée des interactions gravitationnelles.
- Par exemple, si le Soleil se faisait kidnapper, la Terre cesserait immédiatement de tourner.
- Or, ceci est impossible : la vitesse de la lumière établit une borne supérieure à la vitesse de propagation des interactions.
- En réalité, la théorie Newtonienne ne prétend que décrire le cas statique. Mais comment y introduire de la dynamique ?
- Pour le dire autrement, s'il n'y a plus de simultanéité, quelle masse prendre dans la formule ? Et la distance entre planètes ne dépend-t-elle pas du référentiel ?
- Conclusion : il faut revisiter la théorie Newtonienne !

## Echauffement : Galilée et la chute des corps

- Nous avons vu que tous les corps tombent à la même vitesse.
- C'est le principe d'équivalence (WEP), qui stipule que la charge gravitationnelle est égale à la charge inertielle.
- Pour s'échauffer, présentons l'argument historique de Galilée.
- Aristote affirme que les objets plus lourds tombent plus vite.
- Galilée effectue l'expérience de pensée suivante : soit une pierre attachée à un drap par une corde (parachute).
- Ce système tombe plus lentement que la pierre seule.
- La loi d'Aristote ne peut donc être vraie en tant que telle : il faut tenir compte des forces de frottements.
- Il conjecture que tous les objets tombent à la même vitesse dans le vide, et que la loi empirique d'Aristote est une conséquence de la résistance de l'air.

# Principe d'équivalence

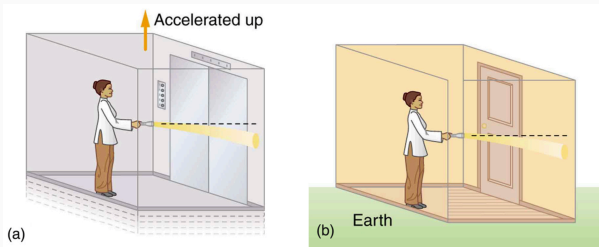
- Einstein comprend en 1907 que le principe d'équivalence est la pierre angulaire de la gravitation. C'est sur elle qu'il bâtira son église.
- Il comprend qu'on ne *sent pas son poids quand on tombe : c'est comme si la cause annulait l'effet.*
- C'est la célèbre expérience de pensée de l'ascenseur. Imaginons que Matilde se trouve dans un accélérateur en ascension dans le vide avec une accélération  $g$ . Elle ressent une force vers le bas qui est localement indistinguable de la force de gravité.
- De la même façon, si l'ascenseur est en chute libre vers le bas dans le champ gravitationnel terrestre, alors Mati ne sait pas qu'elle tombe, puisque tous les objets tombent à la même vitesse qu'elle ! (0g, ISS)

## Principe d'équivalence d'Einstein (EEP)

Localement, il est impossible de distinguer les effets de la gravitation des effets d'une accélération de référentiel.

# Eden et Naomi dans l'ascenseur

- Considérons deux personnes, Eden, sur Terre et Naomi, dans un ascenseur en plein vide interstellaire.
- Elles allument toutes deux une lampe torche.
- Comme l'ascenseur accélère vers le haut, Naomi voit le rayon lumineux dessiner une trajectoire courbe vers le bas.
- Par l'EEP, Eden doit observer le même phénomène.
- Autrement dit, la lumière est sensible à la gravité !

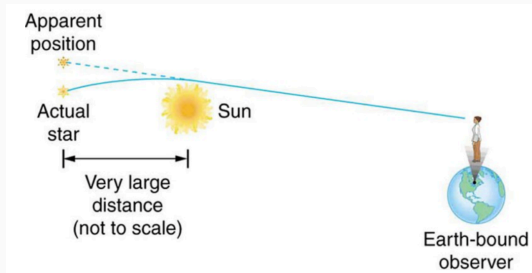


**Figure 1** – A gauche, Eden ; A droite, Naomi.



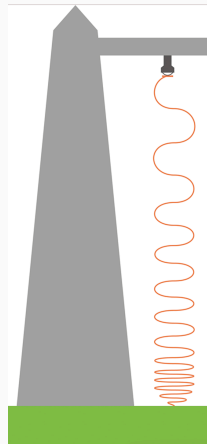
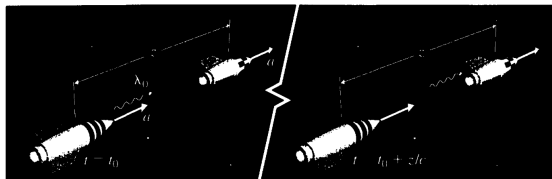
# Lentille gravitationnelle

- C'est en fait une prédiction de la théorie newtonnienne en effectuant le calcul avec  $m \rightarrow 0$  à la toute fin, mais inexplicable conceptuellement.
- Pour Einstein, c'est une évidence, de par l'équivalence masse/énergie.
- Les théories Newtoniennes et Einsteininiennes prévoient un angle de déviation qui diffère d'un facteur 2.
- 1919 : Eddington effectue un test de lentille gravitationnelle pendant une éclipse qui confirme les prédictions de la relativité générale.



# Redshift gravitationnel

- Considérons deux fusées parallèles qui accélèrent au même rythme.
- Si la première fusée émet un photon, celui-ci subira un effet Doppler relativiste, puisque la seconde s'éloigne du lieu d'émission.
- EEP : la situation est équivalente à l'émission d'un rayon lumineux vers le bas dans le champ gravitationnel terrestre.
- On en déduit que de tels rayons sont redshiftés !
- Cette expérience de pensée, due à Einstein (1907), sera confirmée expérimentalement par Pound et Rebka (1959)



# La théorie

---

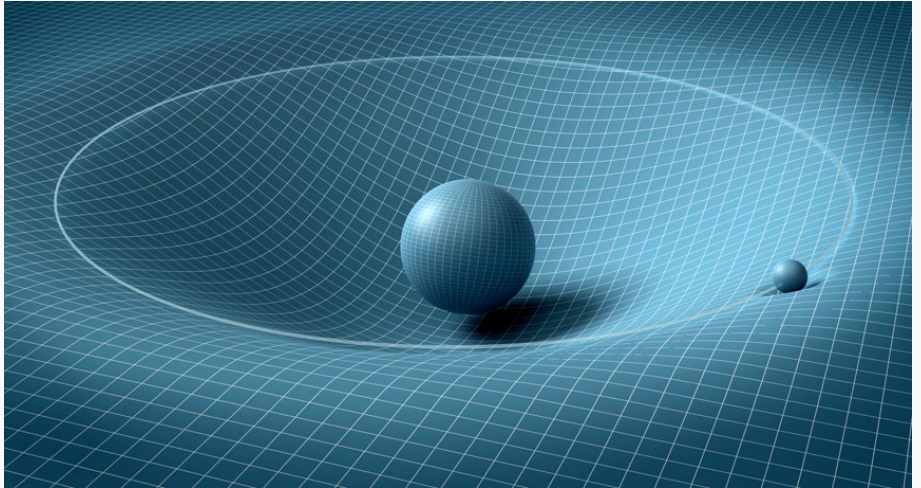
# Géométriser l'espace-temps

- Si tous les corps se meuvent de la même façon dans un champ gravitationnel, pourquoi ne pas décrire leur trajectoire comme le *mouvement naturel* sur une variété courbe ?
- Dans un espace plat, les trajectoires naturelles sont les droites. Quels en sont les équivalents dans un espace courbe ? Les géodésiques !
- Les droites sont caractérisées par le fait qu'elles minimisent la distance entre deux points. De même, les *géodésiques* sont définies comme les courbes qui extrémisent la longueur du chemin entre leurs extrémités.
- Comme la métrique est lorentzienne, ces trajectoires maximisent le temps propre, cf. paradoxe des jumeaux.

## Slogan (J. Wheeler)

L'espace-temps dit à la matière comment se mouvoir.

# L'image classique



## Topologie

- Local.
- Notions clé : connexité  $\rightarrow$  trous.
- Généralise l'analyse en s'émancipant de la notion de *distance*.
- Deux variétés identiques du point de vue topologique sont dites homéomorphes.
- Question-type : classifier des variétés selon leurs invariants topologiques.

## Géométrie

- Global.
- Notion clé : distance  $\rightarrow$  métrique.
- But : Transférer les outils de l'algèbre linéaires aux variétés topologiques.
- Deux variétés identiques du point de vue géométrique sont dites homéomorphes.
- Question-type : calculer la courbure d'une variété, déterminer ses géodésiques, etc.

# Qu'est-ce qu'un référentiel inertiel ?

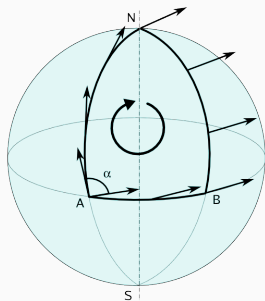
- Référentiel  $\equiv$  système de coordonnées.
- Ainsi, changer de référentiel physique (d'observateur) correspond à effectuer un changement de coordonnées sur la variété.
- Les variétés différentielles étant localement difféomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , on peut montrer qu'il existe un système de coordonnées dans lequel la métrique est minkoswkienne.
- De tels référentiels sont dits inertiels ! Les lois de Newton s'y appliquent.

## Principe d'équivalence 2.0

Il existe une classe privilégiée de référentiels dits *inertiels* en mouvement libre dans un champ de gravitation. Mathématiquement, cela correspond au fait que les espaces courbes sont localement plats !

# Courbure

- Observation : en général, le transport parallèle de vecteurs le long modifie le vecteur.
- Dans les espaces *intuitivement plats*, le vecteur n'est pas modifié.
- La courbure est conçue comme une mesure du degré de transformation des vecteur sous le transport parallèle.
- Cette information est entièrement contenue dans un objet à quatre indices appelé tenseur de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ .
- Il y a 256 nombres dont seuls 20 sont indépendants en 4D.
- A partir de  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , on construit d'autres objets comme le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$ .





# Les équations d'Einstein

- On a spécifié entièrement comment les corps réagissent à la courbure de l'espace-temps.
- Il reste à décrire de quelle manière l'espace-temps se courbe en présence de matière.
- On veut donc écrire une équation qui lie la géométrie de l'espace-temps quantifiée par le tenseur de Riemann, à son contenu en énergie, qui est quantifiée par le tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$ .
- La beauté du formalisme, c'est que les bonnes équations sont les plus simples que l'on puisse écrire :

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

## Slogan (J. Wheeler)

La matière dit à l'espace-temps comment se courber.

# Succès observationnels

La relativité générale a été couronnée par d'innombrables succès expérimentaux, de sorte que sa validité n'est quasiment jamais remise en doute :

- Avance du périhélie de Mercure (1859).
- Lentille gravitationnelle (1919).
- Redshift gravitationnel (1959)
- Effet Shapiro (1966).
- Ondes gravitationnelles (2016).
- Trous noirs (1971, 2019)
- Cosmologie (1929, 1964, 1998, 2009).
- Tests du principe d'équivalence (1885-2023).
- Nombreux tests à l'échelle du système solaire et de la galaxie.

## LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less  
Agog Over Results of Eclipse  
Observations.

### EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed  
or Were Calculated to be,  
but Nobody Need Worry.

### A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could  
Comprehend It, Said Einstein When  
His Daring Publishers Accepted It.

# Modifier la théorie ?

- Une autre raison pour laquelle la relativité générale est considérée comme très fiable est qu'il est difficile de la modifier.
- C'est une remarque qui vaut pour une large portion de la physique moderne : on parle de *rigidité*.

## Théorème [Lovelock]

Les équations d'Einstein sont les seules équations de champ locales et de 2<sup>ème</sup> ordre d'une variété qui puissent être dérivées d'une action en  $D = 4$ .

Les seules possibilités pour modifier la théorie sont :

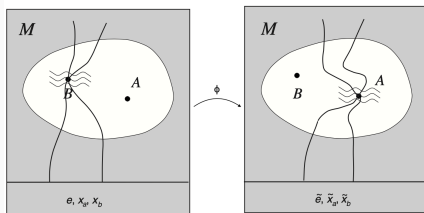
- Ajouter des champs (scalaires  $\rightarrow$  théorie tenseur-scalaire, métriques  $\rightarrow$  théories bimétriques).
- Considérer des équations d'ordre supérieur ( $\rightarrow f(R)$  : génériquement instables).
- Considérer des dimensions supplémentaires (théorie de Kaluza-Klein).
- Considérer des théories non-locales.

*(...) This [EP] happened in 1908. Why were another seven years required for the construction of the general theory of relativity? The main reason lies in the fact that it is not so easy to free oneself from the idea that coordinates must have an immediate metrical meaning.*

- Il reste un aspect clé de la relativité générale à discuter : il s'agit de l'invariance sous les difféomorphismes et du rôle des coordonnées.
- Un difféomorphisme est une transformation lisse d'une variété qui préserve sa structure, e.g. déformer une sphère en ellipsoïde. Point crucial : ce n'est **pas** une transformation de coordonnées –  $g \neq g'$ .
- La RG est une théorie *géométrique* : on peut écrire toutes les équations indépendamment de tout système de coordonnées.
- Einstein comprend en 1912 que cela implique l'invariance par difféos de la théorie, ce qui mène à d'amples confusions.
- Cette confusion a retardé le développement de la théorie de deux ans.

# L'argument du trou

- Considérons donc le champ gravitationnel généré par le Soleil. En effectuant un difféo, on obtient un *autre* espace-temps.
- Cela signifie que connaître la distribution de matière ne suffit pas à connaître la métrique ! Il devient impossible de faire de la physique !
- Donc, les solutions liées par des difféomorphismes sont équivalentes.
- Par conséquent, on ne peut pas localiser un point dans l'espace-temps sans qu'une particule ne s'y situe.
- La position d'un point n'est définie que *relativement* à tous les autres points : tout ce dont on peut parler, c'est des coïncidences d'événements.



## Slogan

Il n'y pas d'observables locales en gravité quantique.

Dans *As you like it*, Shakespeare écrit :

*The whole world's a stage, and the men and women merely players.*

La relativité générale bouleverse cette conception : la scène disparaît et devient l'un des acteurs. Le monde change de statut : l'Univers devient un objet physique.

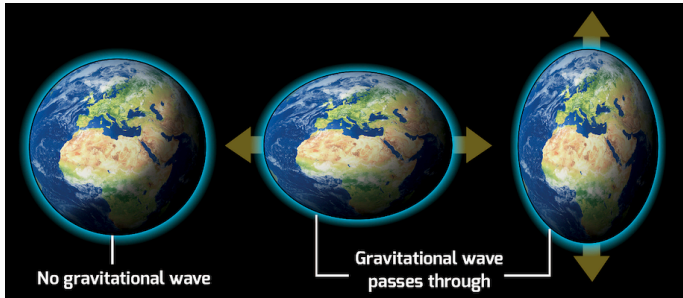
Einstein considérera plus tard cette idée comme la plus profonde de sa théorie. Cette réalisation annonce aussi l'étude la cosmologie.

# Applications

---

# Les ondes gravitationnelles

- Une charge électrique en mouvement accéléré produit une onde électromagnétique.
- De la même façon, un corps massif en mouvement accéléré génère une onde gravitationnelle.
- C'est l'espace-temps lui-même qui vibre, contractant et dilatant les corps dans les directions transverses à l'onde.





## Trou noir, trou noir, dis-moi qui est la plus belle ?

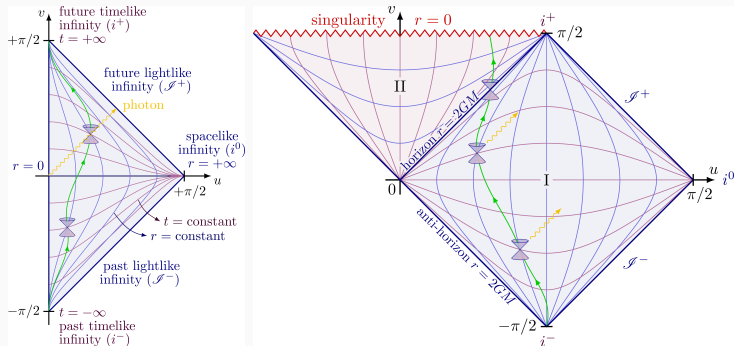
- Bien que radicalement différent des trous noirs que prédit la relativité générale, l'idée que certains objets astrophysiques soient invisibles germe dès le XVIII, chez Michell puis Laplace.
- L'idée est que la vitesse de libération de l'objet soit supérieure à la vitesse de la lumière.
- Michell imagine même qu'on puisse détecter de tels corps par leur influence gravitationnelle.

*Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles.*

–Laplace, 1796.

# Maman, c'est quoi un trou noir ?

- Un trou noir est caractérisé par une singularité et un horizon.
- Un horizon est une surface séparant deux régions de l'espace-temps qui ne peuvent échanger d'information : ce qui rentre ne peut ressortir.



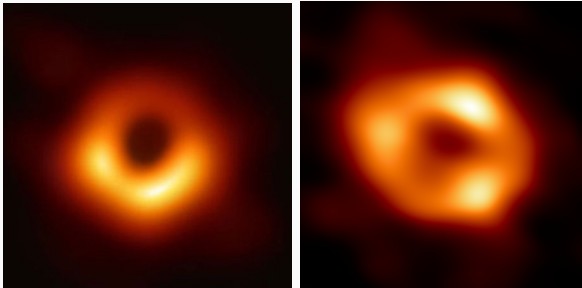
**Figure 2** – À gauche, le diagramme conforme d'un espace-temps minkowskien ; à droite, celui d'un trou noir.

## Sucked into the super massive black hole 🎵

- 1915 : Schwarzschild découvre que la relativité générale prédit l'existence de trous noirs. Einstein pense qu'il ne s'agit pas de solutions physiques.
- 1931 : Chandrasekhar montre qu'il existe une masse limite à la stabilité d'une étoile morte.
- 1939 : Oppenheimer et Snyder calculent l'effondrement gravitationnel d'une étoile en trou noir.
- 1958 : Finkelstein interprète l'horizon comme une frontière causale.
- 1964 : Penrose *prouve* qu'une étoile suffisamment massive s'effondre *nécessairement* en un trou noir.
- 1967 : J. Wheeler invente le terme *trou noir*.
- 1977 : Asimov publie *The collapsing Universe : The Story of Black Holes*.
- 2020 : Le prix Nobel est attribué à Penrose, Reinhard et Ghez pour leurs travaux sur les trous noirs.

# Maman, ça existe les trous noirs ?

- 1974 : Découverte de Sagittarius A\* au centre de la Voie Lactée.
- 2002-2004 : Reinhard et Ghez apportent des preuves expérimentales que Sagittarius A\* est un trou noir supermassif.
- 2006 : Le groupe Muse sort l'album Black Hole and Revelations.
- 2019 : Première image d'un trou noir dévoilée (EHT).
- 2022 : Première image de Sagittarius A\* dévoilée.



**Figure 3** – A gauche, M87\* ; A droite, Sagittarius A\*.

# Cosmologie I

- L'Univers étant un objet physique, on peut l'étudier dans sa globalité : c'est la *cosmologie*. De plus, l'espace-temps est dynamique : l'Univers a donc une *histoire*.
- Mais que peut-on en dire *en pratique*? Il est évidemment impossible d'écrire la métrique de l'Univers entier...

## Principe Cosmologique [Einstein, 1916]

A l'échelle cosmologique (Mpc), l'Univers est homogène et isotrope.

## Corollaire

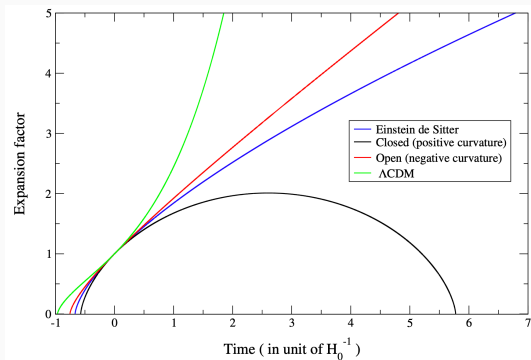
L'espace est maximale symétrique, i.e. possède le nombre de symétries maximal d'une variété tridimensionnelle.

Il peut donc s'agir d'une sphère, d'un feuilleté, d'un 3-tore, d'un hyperboloïde, etc. La métrique s'écrit :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right]$$

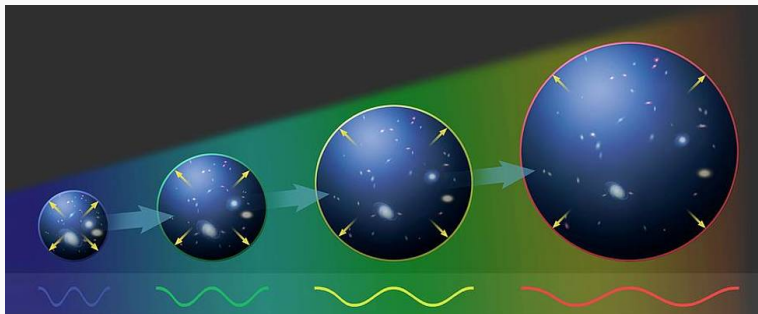
## Cosmologie II

- La distribution de matière dans l'Univers est aussi homogène et isotrope. On peut donc la modéliser.
- Substituant dans les équations d'Einstein : on obtient des équations d'évolution pour le facteur d'expansion  $a(t)$ .
- On peut rétrodire l'histoire de l'Univers ! sa taille, sa densité, etc.
- Différents contenus en matière donnent naissance à différents Univers !

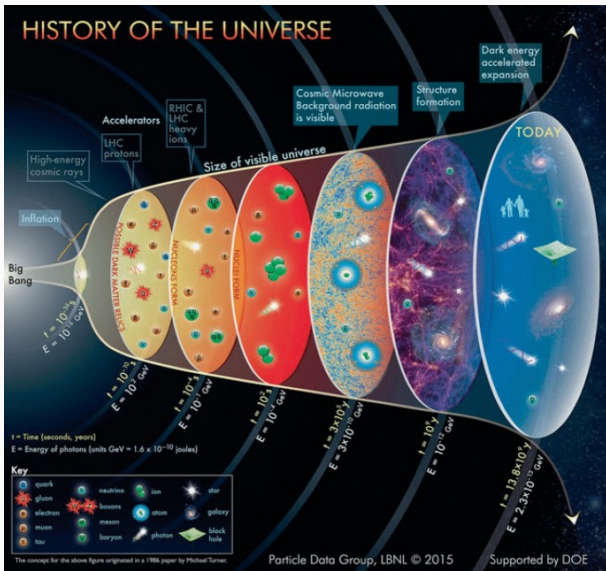


# L'atome primitif

- Friedmann réalise le premier que la RG prédit un Univers en expansion, ce qui est confirmé expérimentalement par Hubble en 1929.
- Einstein, dès 1916, avait ajouté un terme à ces équations pour obtenir un Univers statique : c'est la constante cosmologique.
- Lemaître s'appuie sur les travaux de Friedmann pour établir une théorie de l'*origine* : c'est la naissance de la théorie du Big Bang.

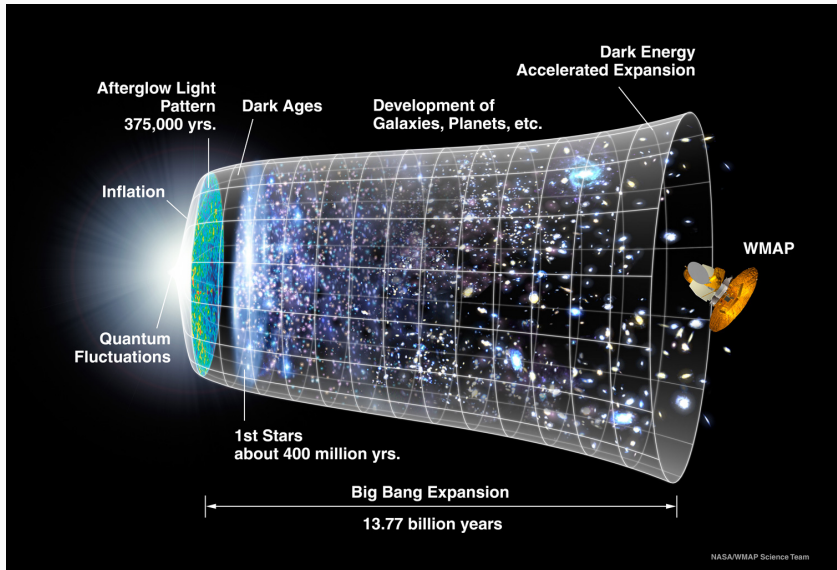


# If I could save time in a bottle ♪





# Our whole Universe was in a hot dense state ♪



**Vers l'infini et au-delà**

---

# Un édifice inachevé ?

- La relativité générale est une théorie classique. Elle ne s'inscrit pas dans le cadre conceptuel quantique.
- Le Graal : formuler une théorie quantique de la gravitation.
- Problème : c'est *dur*. Cela suppose que l'espace-temps puisse fluctuer. On doit remettre en question les notions mêmes d'espace et de temps.
- Pour comprendre le problème, procédons à une expérience de pensée.
- Imaginons qu'on veuille scruter une région de l'espace-temps avec une précision  $\epsilon$ .
- On identifie cette région en y déposant une particule. Par le principe d'indétermination de Heisenberg,  $\Delta x \sim \epsilon \rightarrow \Delta p \sim \epsilon^{-1}$ .
- Effectuer des observations à de très faibles échelles de distances requiert donc une grande quantité d'énergie.

## Vers une théorie quantique ?

- Lorsque la densité d'énergie injectée dans l'espace-temps devient suffisante, un trou noir apparaît !
- La région que l'on souhaitait observer est cachée derrière l'horizon du trou noir...
- Conséquence : L'espace-temps n'est pas opérationnellement bien défini à l'échelle de Planck  $\ell_p \sim 10^{-35} m$ .
- D'autres expériences de pensée similaires suggèrent de même que l'espace-temps n'est pas un objet physique *fondamental* : il *émerge* d'une autre structure à l'échelle de Planck.
- Structures candidates : atomes d'espace-temps, cordes, etc.
- D'autres propositions, plus récentes/subtiles existe, e.g. l'holographie.

*Truth lies in the tiny strings,*

– Mahatma Gandhi

Quelques suggestions de lecture :

- *Dreams of a final theory*, Steven Weinberg.
- *The first three minutes*, S. Weinberg.
- Any Carlo Rovelli book, they're all the same anyway.
- *Une brève histoire du temps*, S. Hawking
- Lenny Susskind's Theoretical Minimum series.
- *Qu'est-ce que la gravité ?*, dirigé par E. Klein, P. Brax et P. Vanhove.
- *L'Univers Élégant*, Brian Greene.
- *Spacetime and Geometry*, Sean Carroll