Physique pour tous
2023-2024

Cours 3: Mécanique des fluides

Baptiste Coquinot

<u>Objectif fondamental:</u>

Etudier la forme et le mouvement des fluides, c'est-à-dire des liquides et des solides. Il s'agit donc de passer de la description Newtonienne de la mécanique d'un point à la mécanique d'un milieu continu.

<u>Contexte de développement:</u>

15ème-17ème: étude qualitative de l'hydrostatique.
1687: Newton publie ses *Principia*, qui formalise la dynamique d'un corps ponctuel.
18ème-19ème: formalisation de la mécanique des fluides.
20ème-21ème: application à des systèmes complexes pour lesquels on est loin d'avoir tout résolu.

<u>Plan du cours:</u>

1. Hydrostatique et tension de surface
2. Phénomènes capillaires
3. Dynamique des fluides parfaits
4. Viscosité et équations de Navier-Stokes
5. Instabilités hydrodynamiques

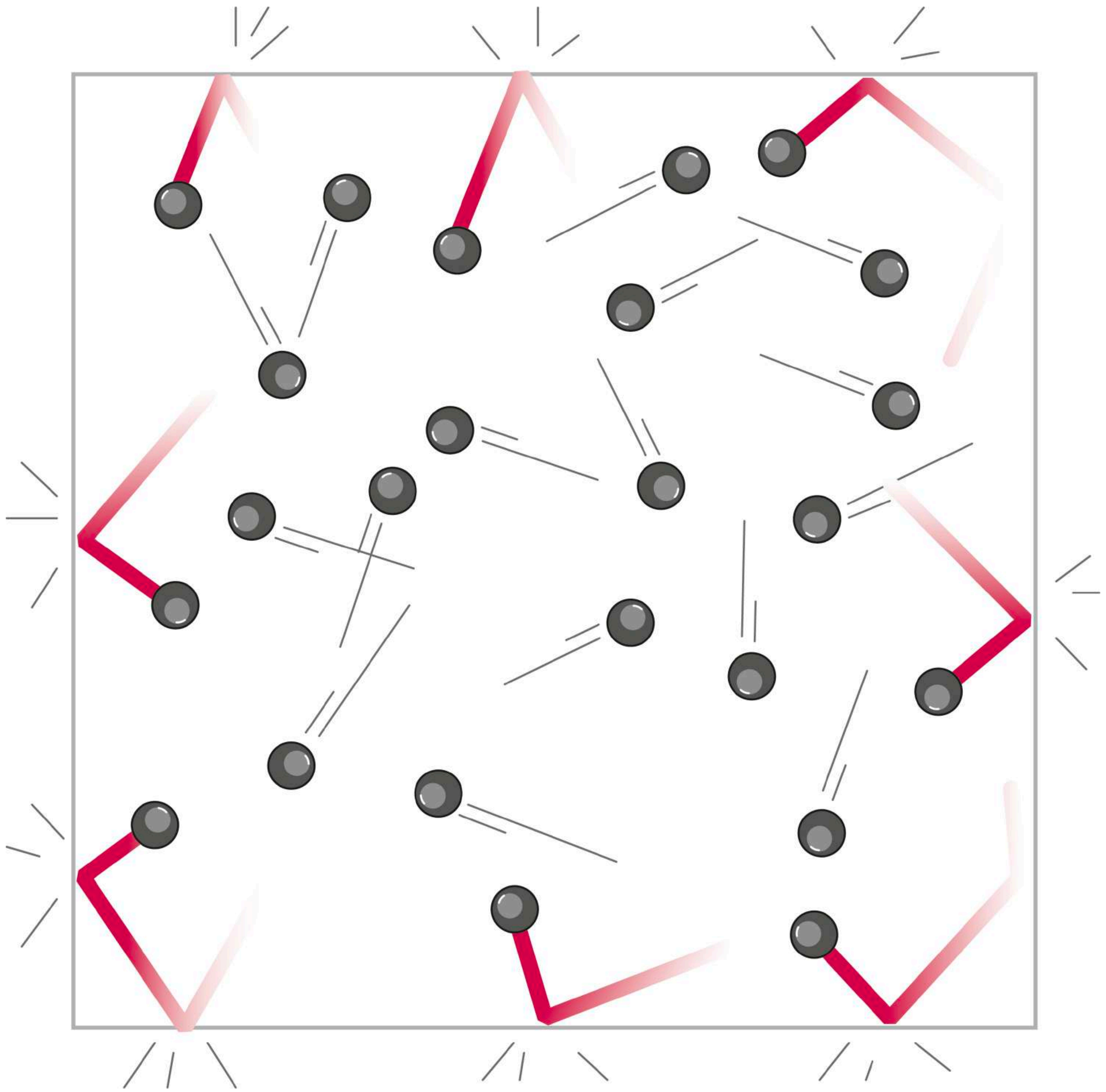
Première partie:

Hydrostatique et tension de surface

Rappel sur la pression

Pression

<u>Définition</u>: la pression correspond à la force par unité de surface que le fluide appliquerait à une parois. Une peut la définir partout, même quand il n'y a pas de parois en imaginant le scénario où l'on ajouterait une parois à cet endroit.
<u>Notation</u>: P
<u>Unité</u>: En Pa (1 Pa = 1 N/m^2)
<u>Remarque</u>: la pression atmosphérique vaut $P_A = 10^5$ Pa.



Origine physique:

La pression vient des collisions entre les molécules et la parois. Chaque collision correspond à un rebond qui transfère une petite quantité de mouvement à la parois.

Equilibre de l'atmosphère

On avait vu que l'atmosphère ne tombe pas car il y a plus de molécules en bas qu'en haut de sorte que l'agitation thermique compense la gravité. On va généraliser cela dans le langage des fluides.

Gravité et hydrostatique

En général, l'équilibre d'un fluide peut s'écrire par un bilan des forces (par unité de surface) comme sur le schéma à droite. On peut découper le fluides en plusieurs couches successives. Si on considère la couche B, d'une hauteur h et densité massique ρ, qui est à l'équilibre, la somme des forces qui s'y applique doit être nulle. Elle subit 3 forces:

- La force de gravité ρgh vers le bas.
- La force de pression de la couche inférieure P_C vers le haut.
- La force de pression de la couch supérieure P_A vers le bas.

On en déduit l'équation:

$$P_C - P_B = \rho gh$$

Autrement dit, sur une hauteur h que l'on descend, la pression croit de ρgh.

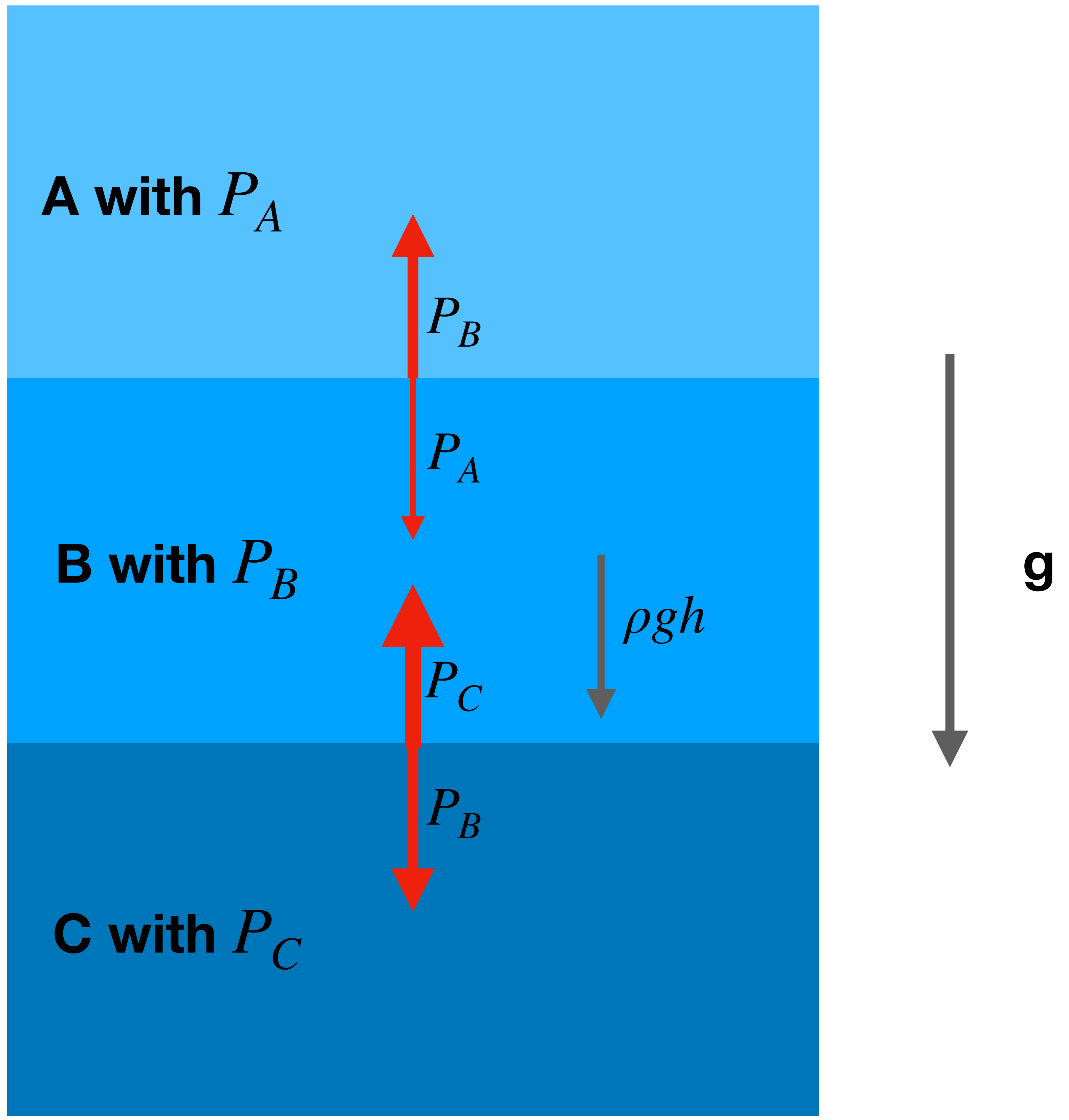
Ecrite de façon plus compacte, cela devient:

$$\nabla P = -\rho g$$

où le symbole ∇ s'appelle gradient est correspond à la variation spatiale. On a donc une équation dont la solution est la pression P qui est une fonction de l'espace.

Dans l'atmosphère, la densité ρ dépend elle-même de la pression par la loi des gaz parfaits. On obtient alors une équation que l'on peut résoudre et qui prédit que la pression de l'atmosphère décroit exponentiellement avec l'altitude.

Dans un fluide comme l'eau, qui n'est pas du tout un gaz parfait, la densité est constante. On peut alors résoudre l'équation pour prédire que la pression croit linéairement avec la profondeur.



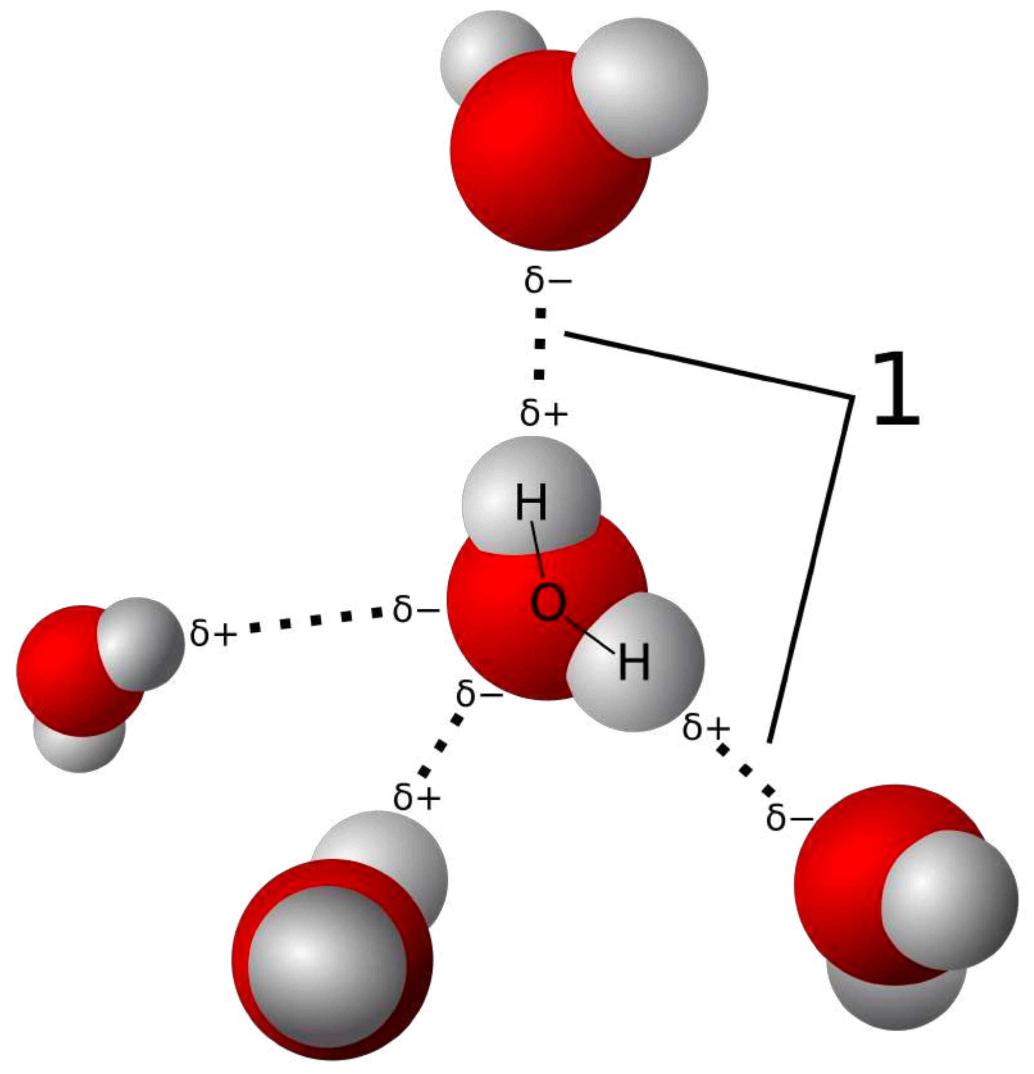
Etats de la matière

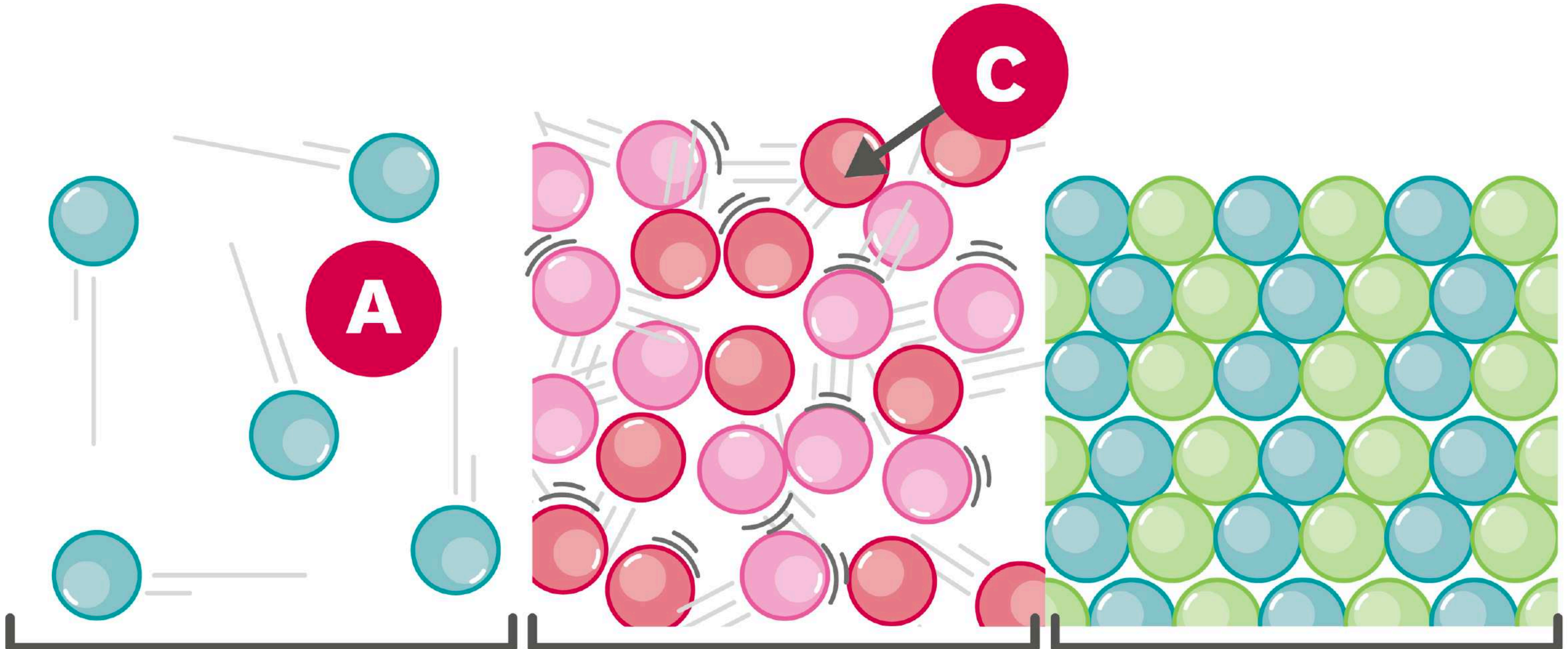
Dans un **gaz**, les molécules sont très espacés et n'interagissant que peu entre elles. C'est pourquoi le modèle du gaz parfait on l'on suppose qu'elles n'interagissant pas du tout fonctionne assez bien.

Dans un **liquide**, les molécules se touchent les unes les autres et interagissent entre elles ce qui les "collent". Les molécules peuvent donc bouger mais elles ont une force qui les attirent les unes aux autres. Par exemple, les molécules d'eau s'accrochent entre elles via des liaisons hydrogène: il y a des charges électriques partielles sur chaque molécules de sorte que deux molécules d'eau peuvent s'attirer électriquement.

Dans un **solide**, les molécules sont se touchent également et sont accrochées les unes aux autres par des liaisons rigides. Les molécules ne peuvent donc pas bouger.

On appelle **fluide** les milieux qui peuvent se mouvoir, c'est-à-dire un gaz ou un liquide.





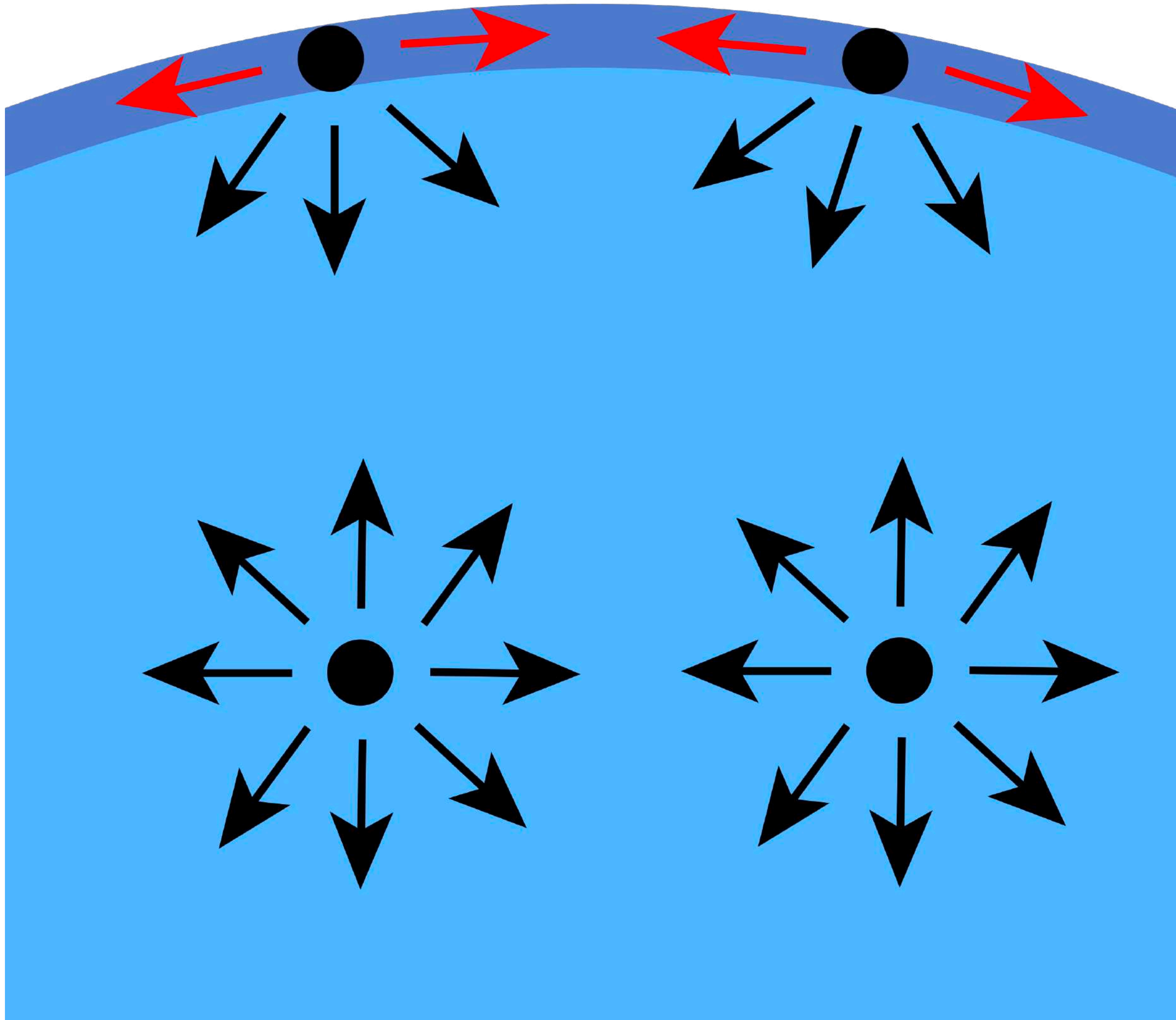
Tension de surface

A une interface entre deux milieux, les molécules n'interagissent pas comme les autres car elles n'ont pas les même voisins. Ainsi, comme les molécules d'un liquide s'attirent les unes les autres, les molécules de la surface sont attirées par leurs voisines du même liquide, qui sont toute d'un même côté de l'interface. Ells subissent donc une force qui les attirent vers l'intérieur.

Autrement dit, les molécules n'aiment pas être à l'interface et subissent une **tension de surface** qui vise à réduire la taille de l'interface. Cette tension est une force proportionnelle à la surface qui s'applique vers l'intérieur et dépend des milieux.

<u>Notation:</u> γ

<u>Unité:</u> Pa (comme la pression).



Longueur capillaire

Le volume qui minimise le plus sa surface est la boule. C'est pour cela que les bulles et gouttes sont de forme sphérique: c'est la forme qui minimise plus la tension de surface. Néanmoins, à l'inverse, la gravité pousse à mettre le plus lourd en bas et le plus léger en haut, et donc à avoir des formes en couches. Mais alors, qui a raison?

Qui gagne entre gravité et tension de surface? La gravité dépende de la masse et donc du volume, tandis que la tension de surface dépend de la surface. Or, le rapport du volume sur la surface diminue avec la dimension:

$$\frac{\text{volume}}{\text{surface}} \sim \frac{\text{longeur}^3}{\text{longeur}^2} \sim \text{longeur}$$

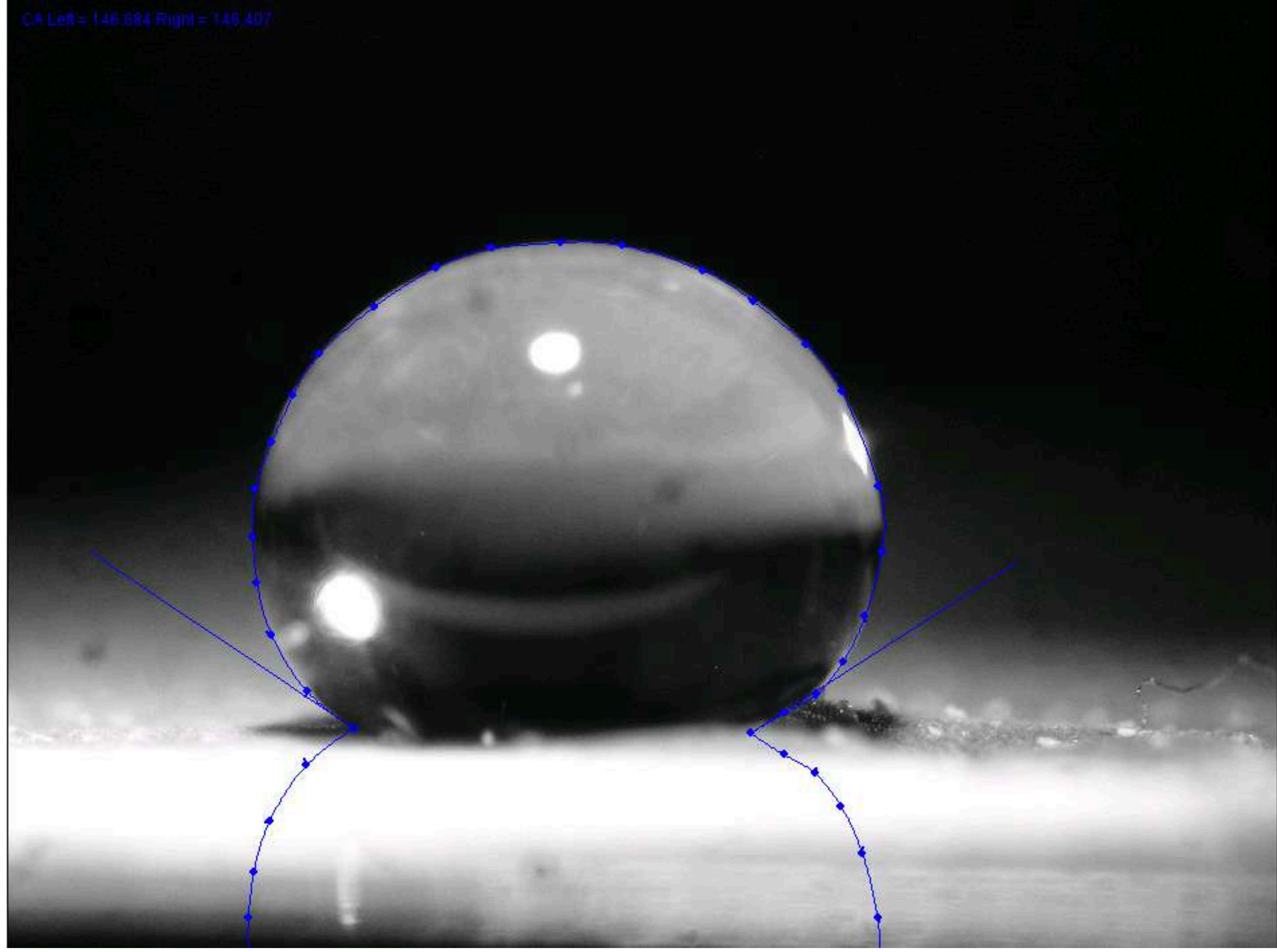
Donc à petite échelle, la tension de surface domine car la surface domine le volume. C'est alors la tension de surface qui domine la forme des objets: on peut donc avoir des gouttes et des bulles de petite taille. A l'inverse à grande échelle, la gravité domine car le volume domine la surface. On n'a donc pas de gouttes ou bulles à grand échelle.

La longueur typique de transition entre domination de la tension de surface et domination de la gravité s'appelle **longueur capillaire**. Pour l'eau, la longueur capillaire est de 3 mm.

Deuxième partie:

Phénomènes capillaires

Forme des gouttes sur une surface



On considère une goutte posée sur un solide à petite échelle (où l'on peut négliger la gravité). Pour savoir si la goutte à envie de s'étaler ou ou contraire et limiter son interface avec le solide, il faut comparer la tension de surface dans les deux cas:

- **Cas non-étalé:** surface solide-air. <u>Tension</u> γ_{SG}.
- **Cas étalé:** surface solide-liquide + surface liquide-air. <u>Tension</u> $\gamma_{SL} + \gamma_{LG}$.

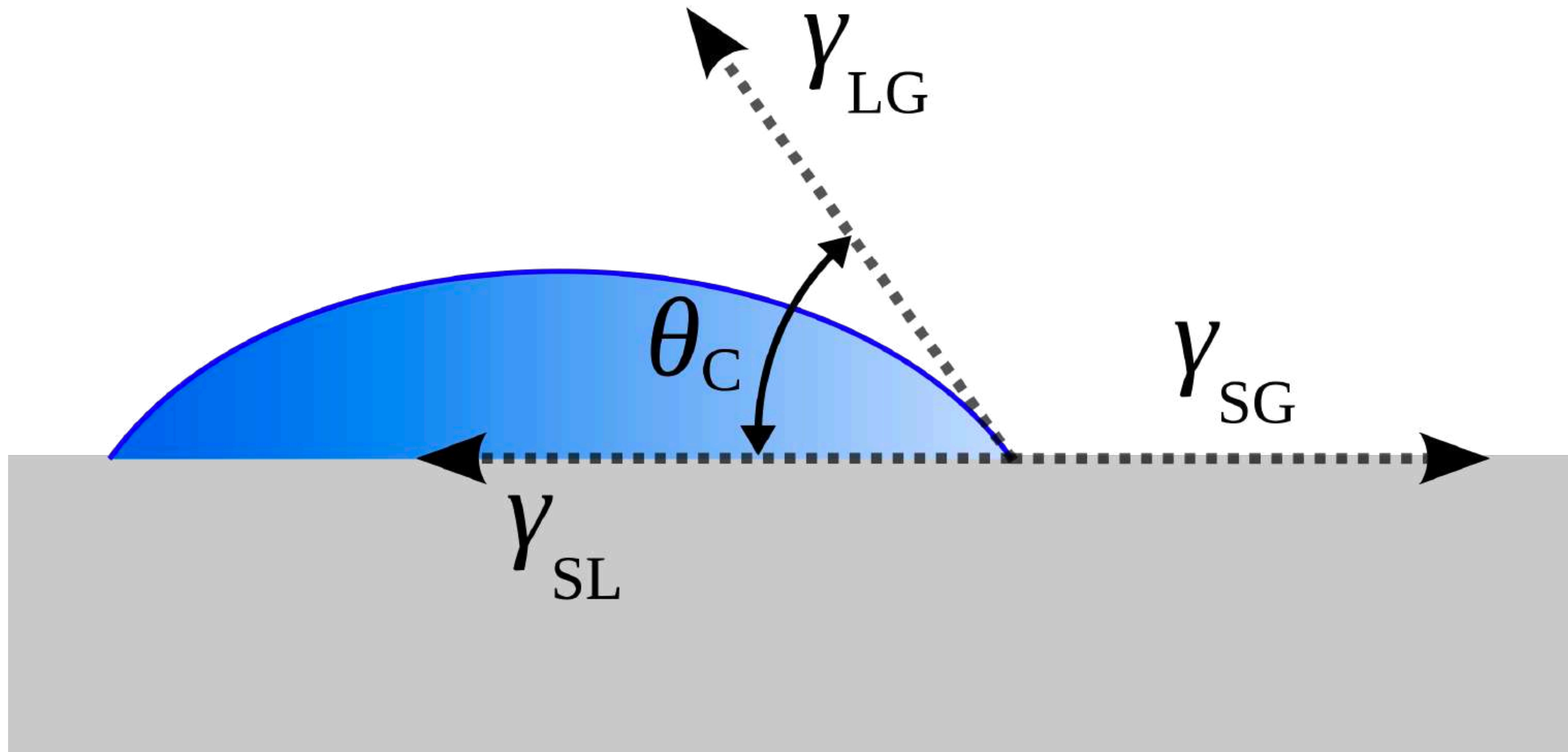
On a donc deux types de surface:

- **Hydrophile:** la tension du cas étalé est plus faible donc il est plus favorable que la goutte s'étale.
- **Hydrophobe:** la tension du cas non-étalé est plus faible, donc la goutte ne va pas s'étaler. En pratique, elle formera une boule coupée à un angle de contact.

L'angle de contact est d'autant plus grand que le milieu est hydrophobe, et est déterminé par les différentes tension de surface. En effet, les tension de surface peuvent être vu comme les forces s'exerçant sur le point triple de l'interface. Un bilan des forces mène à la loi de Young:

$$\gamma_{SL} + \gamma_{LG}\cos(\theta_C) = \gamma_{SG}$$

Thomas Young
1773-1829



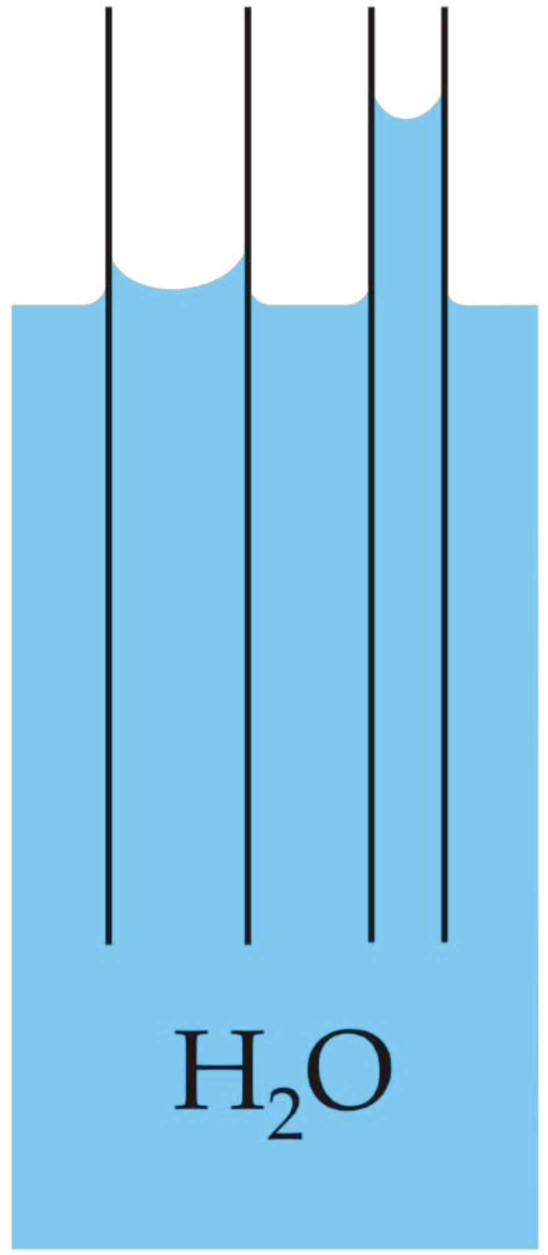
Loi de Jurin et ménisque

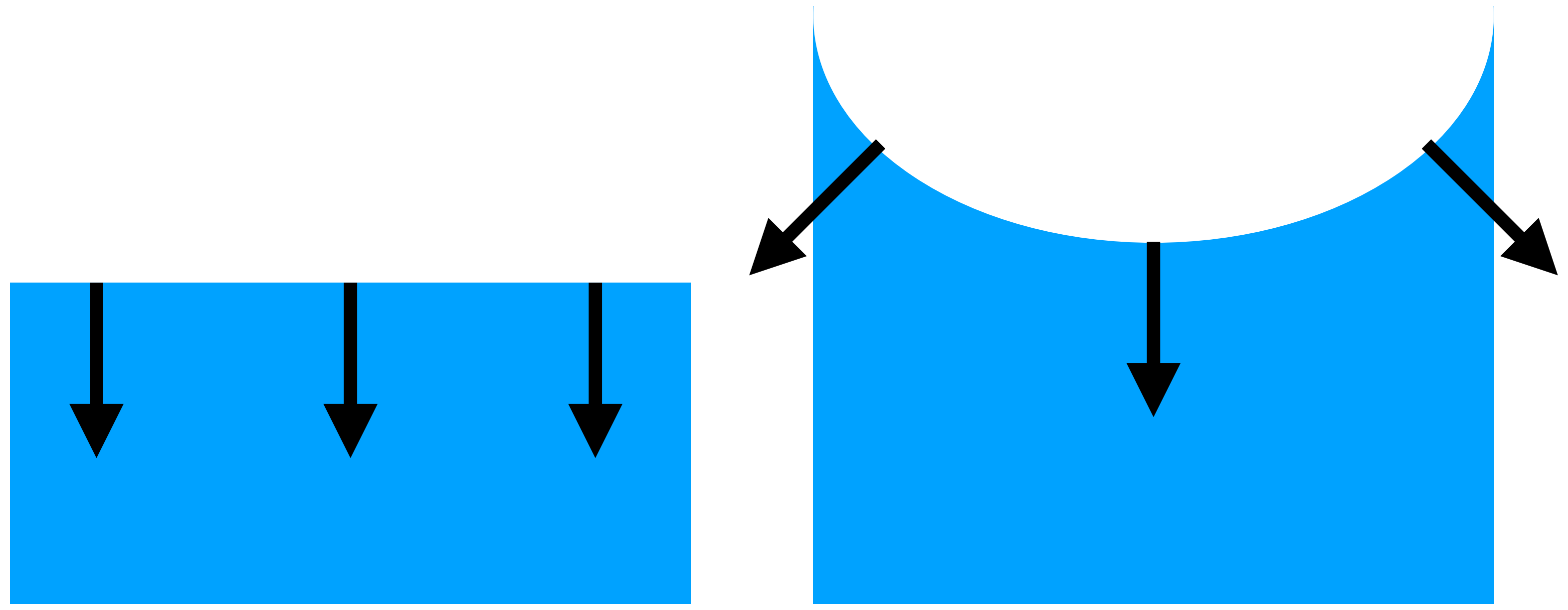
Dans un tube, la loi de Young s'applique au bord, donnant un angle qui courbe l'interface: c'est le **ménisque**. Plus le tube est petit, pour la courbure de l'interface dans le tube est importante.

D'autre part, cette courbure a pour conséquence que la tension de surface tire moins l'interface vers le bas que si elle était plate. Aussi, l'interface réussit à monter plus contre la gravité. C'est donc la tension de surface, ou plutôt le moins de tension de surface, qui contre-balance la pression issue de la gravité par l'équation de l'hydrostatique. On a donc un ascension du liquide: c'est la **loi de Jurin**.

La loi de Jurin montre que la hauteur d'ascension est proportionnel:

- Au cosinus de l'angle de contact: donc d'après la loi de Young, plus la surface est hydrophobe, plus le liquide monte.
- A l'inverse du rayon du tube: donc plus le tube est fin, plus le liquide monte.





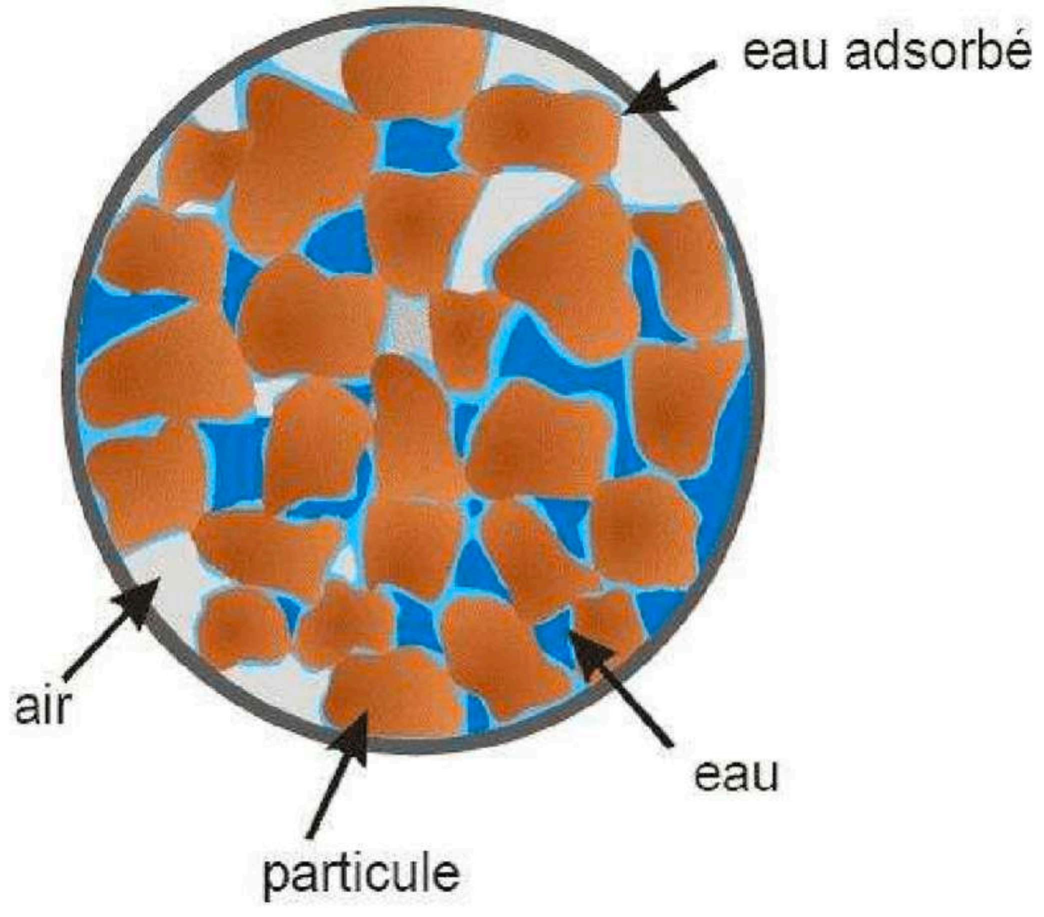
James Jurin
1684-1750

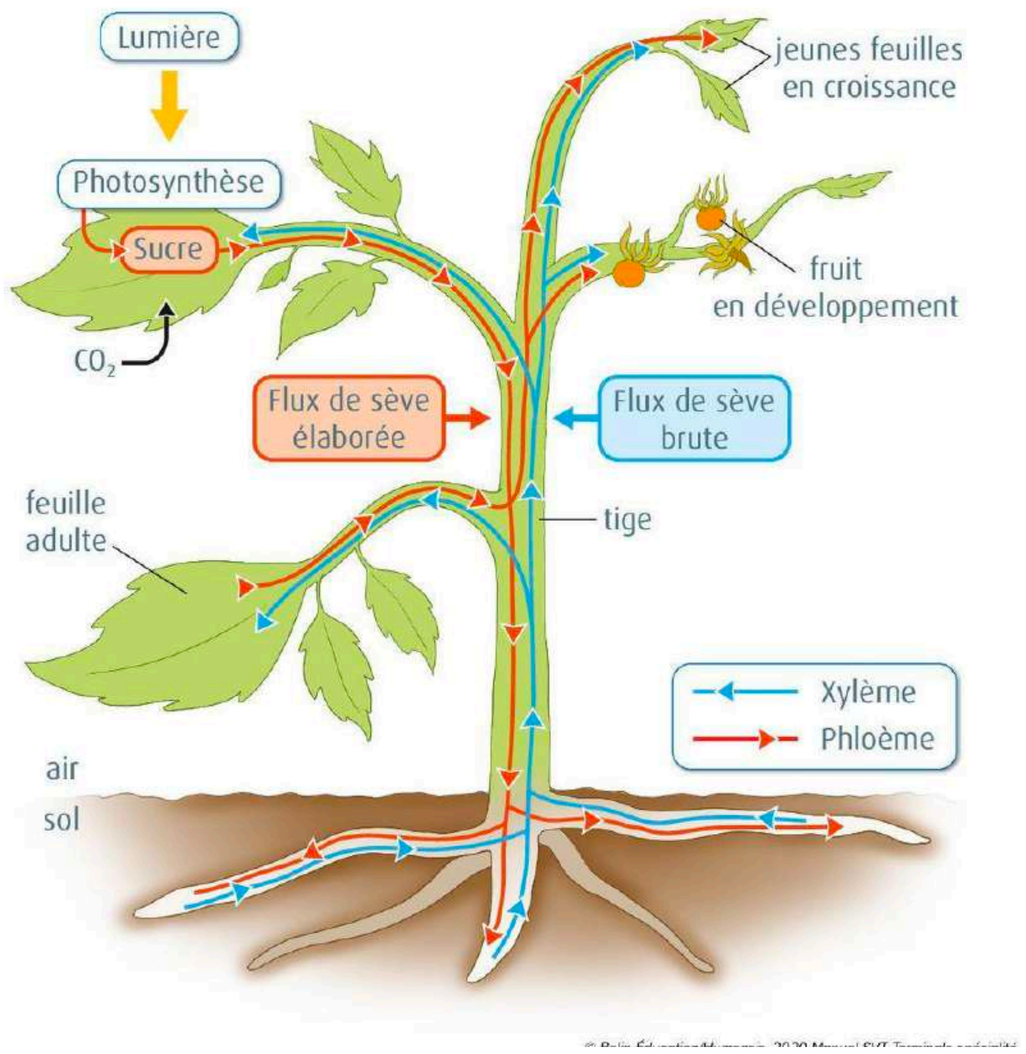
Exemple d’ascensions capillaires

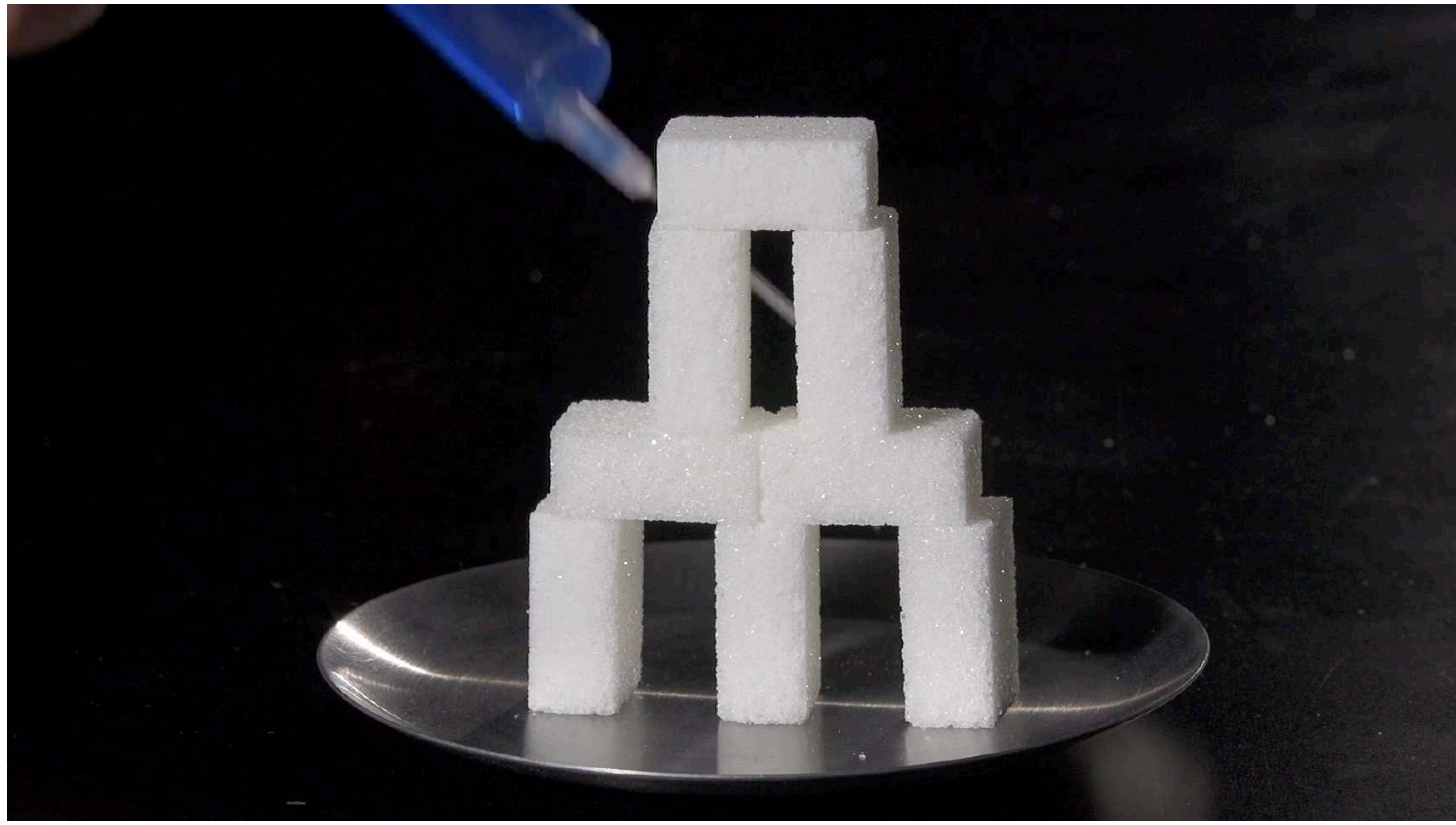
Dans les **milieux poreux**, constitués de pleins de petits trous où s’appliquent la loi de Jurin: une éponge, un mouchoir, du papier toilette, un morceau de sucre, de l’humidité sur les mur, le transports de l’eau des nappes phréatiques …

De nombreux **tubes capillaires en biologie**: pour l’ascension de la sève chez les végétaux, pour le transport du sang dans les petits vaisseaux sanguins, pour l’évacuation des menstruations ou des larmes, la transpiration …

D’autres exemples de **tubes capillaires artificielles**: dans un stylo plume, une bougie, en chromatographie (en chimie)…







Troisième partie:

Dynamique des fluides parfaits

Description de la dynamique d'un fluide

En thermodynamique, on a vue que l'on décrivait un système à l'aide que quelques paramètres: la densité, la pression et la température. Ici, la densité et la température seront supposés uniformes. En revanche, il faut décrire la vitesse du fluide.

En pratique on utilise le point de vu Langrangien

Point de vu Eulérien

Idée: On choisit une particule et on suit son mouvement.

Description: On a besoin de connaître la position et la vitesse de la particule et lui appliquer l'équation de Newton.

Leonard Euler
1713-1783

Point de vu Lagrangien

Idée: On choisit une position et on étudie l'évolution de la vitesse à ce point.

Description: On a besoin de connaître le champ de vitesse, c'est-à-dire al vitesse en tout point de l'espace.

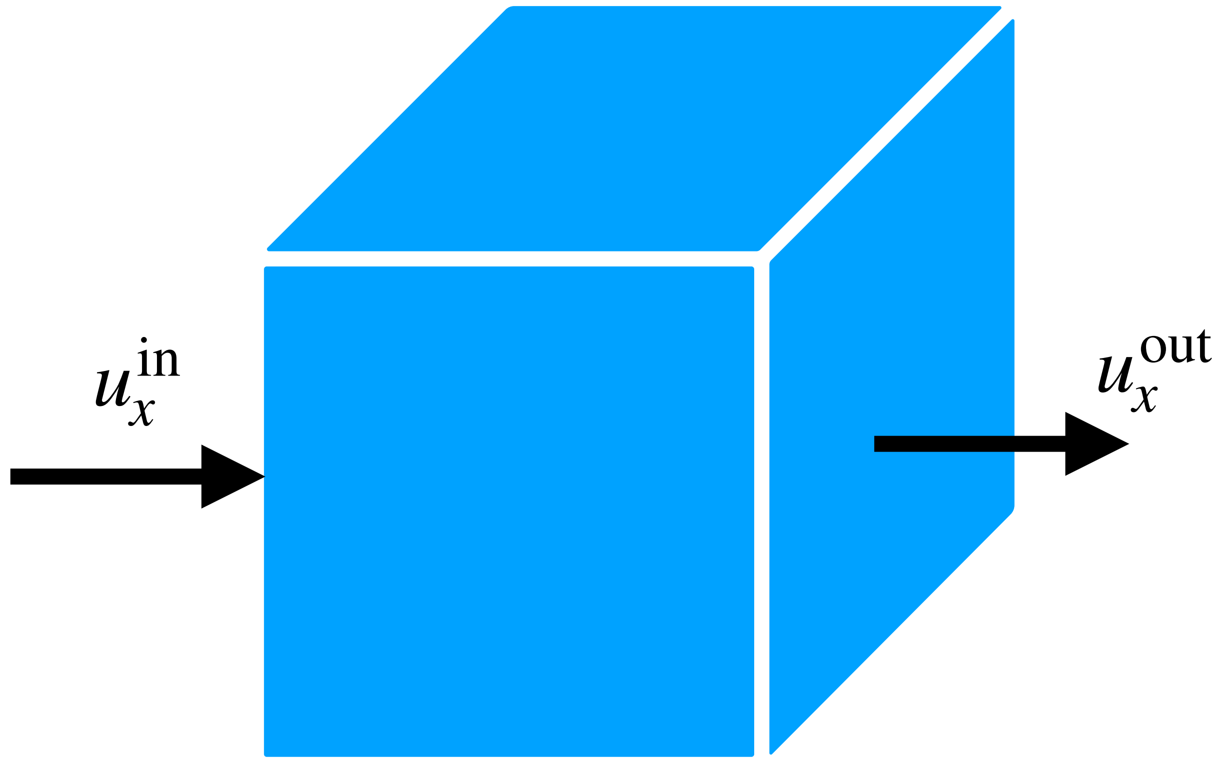
Joseph-Louis Lagrange
1736-1813
Co-fondateur et enseignant de la première ENS de l'an III (1795)
Enterré au Panthéon

Equations d'Euler: idée de la démonstration en 1D

On note u la vitesse Lagrangienne. La fonction u dépend donc de la position et du temps. On note ρ la densité massique, qui est supposée contante, on dit que le fluide est incompressible. On considère un cube fixe de volume V.

Conservation de la masse

Masse du cube: ρV



La masse entrant dans ce cube de surface S durant une durée dt est:

$$\rho S u_x^{\text{in}} dt$$

La masse en sortant est

$$\rho S u_x^{\text{out}} dt$$

Comme le fluide est incompressible, on ne peut pas modifier la masse du cube, donc

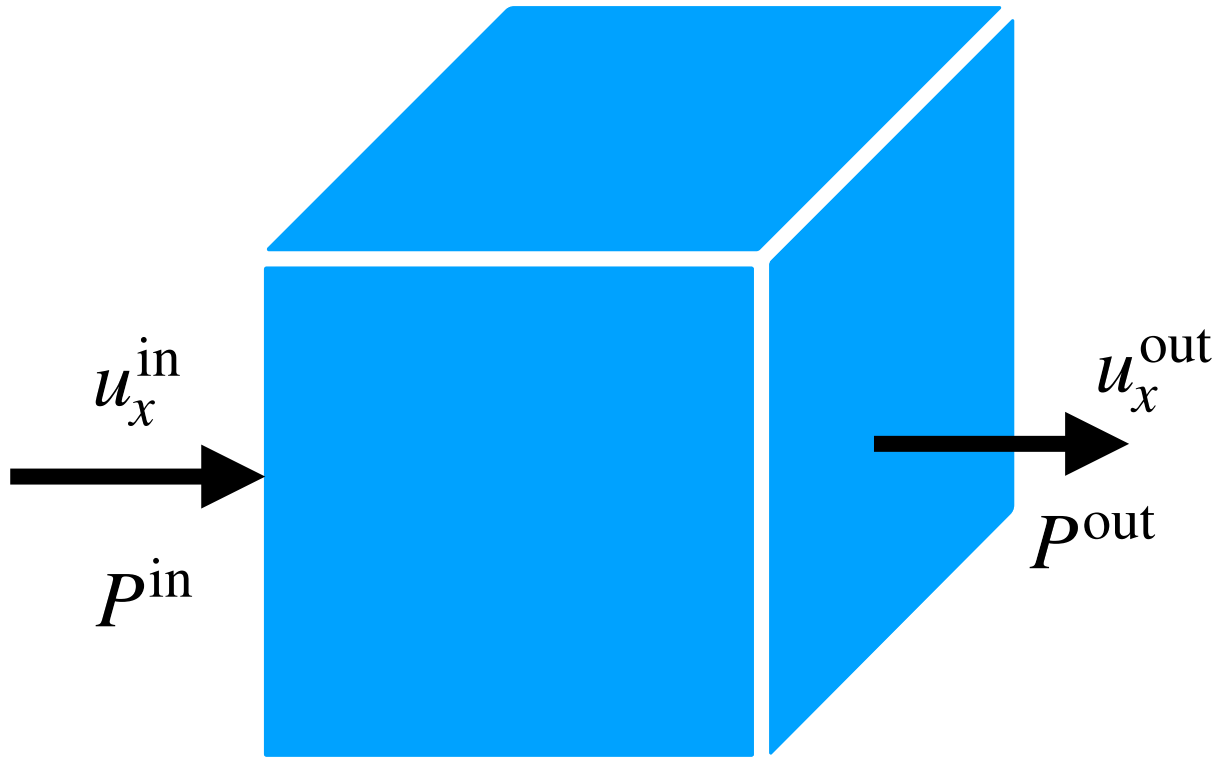
$$\rho S u_x^{\text{in}} dt = \rho S u_x^{\text{out}} dt$$

i.e.

$$\nabla_x u_x = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

Quantité de mouvement du cube: $\rho u_x V$



La quantité de mouvement entrant dans ce cube de surface S durant une durée dt est:

$$\rho u_x^{\text{in}} \times S u_x^{\text{in}} dt$$

La quantité de mouvement en sortant est

$$\rho u_x^{\text{out}} \times S u_x^{\text{out}} dt$$

Les forces de pression qui s'appliquent sur le cube sont

$$S(P^{in} - P^{out})$$

La variation de quantité de mouvement du cube durant la durée dt vaut donc

$$\Delta(\rho u_x S) = \rho u_x^{\text{in}} \times S u_x^{\text{in}} dt - \rho u_x^{\text{out}} \times S u_x^{\text{out}} dt + S(P^{in} - P^{out}) dt$$

i.e.

$$\rho \partial_t u_x + \rho u_x \nabla_x u_x = -\nabla_x P$$

Equations d'Euler: idée générale

On note u la vitesse Lagrangienne. La fonction u dépend donc de la position et du temps. On note ρ la densité massique, qui est supposée contante, on dit que le fluide est incompressible.

Les équations d'Euler sont un jeu de deux équations portant sur le champ de vitesse dans le fluide.

La première exprime la conservation de la masse et s'obtient en faisant un bilan de ce qui rentre et ce qui sort. Dans le cas incompressible, on obtient l'équation suivante:

$$\nabla \cdot u = \nabla_x u_x + \nabla_y u_y + \nabla_z u_z = 0$$

Dans chaque direction, la variation de la vitesse implique une accumulation ou une perte de masse pour le cube. Elle doivent donc se compenser.

La seconde équation exprime la conservation de la quantité de mouvement. C'est une génération de l'équation de Newton pour une masse ponctuelle. Comme le fluide peut bouger, il faut donc faire un bilan de ce qui rentre et ce qui sort, comme pour la masse. De plus, des forces peuvent s'appliquer: la gravité et les forces de pression. Notamment, elle généralise l'équation de l'hydrostatique. On obtient alors une équation dans chaque direction, comme celle-ci:

$$\rho \partial_t u_x + \nabla \cdot (u \times \rho u_x) = -\nabla_x P + \rho g_x$$

Le premier terme correspond à la temporelle de la vitesse: c'est l'accélération de l'équation de Newton. Le deuxième terme correspond au bilan de ce qui rentre et sort: c'est la même forme que pour le bilan de masse. La variation de la vitesse fois la qualité de mouvement ρu_x dans la direction de la vitesse correspond à l'accumulation ou perte de quantité de mouvement. Le troisième terme correspond aux forces de pression: il a la même forme que dans l'équation hydrostatique. Enfin le dernier terme est la gravité, qui est non-nulle dans dans la direction verticale.

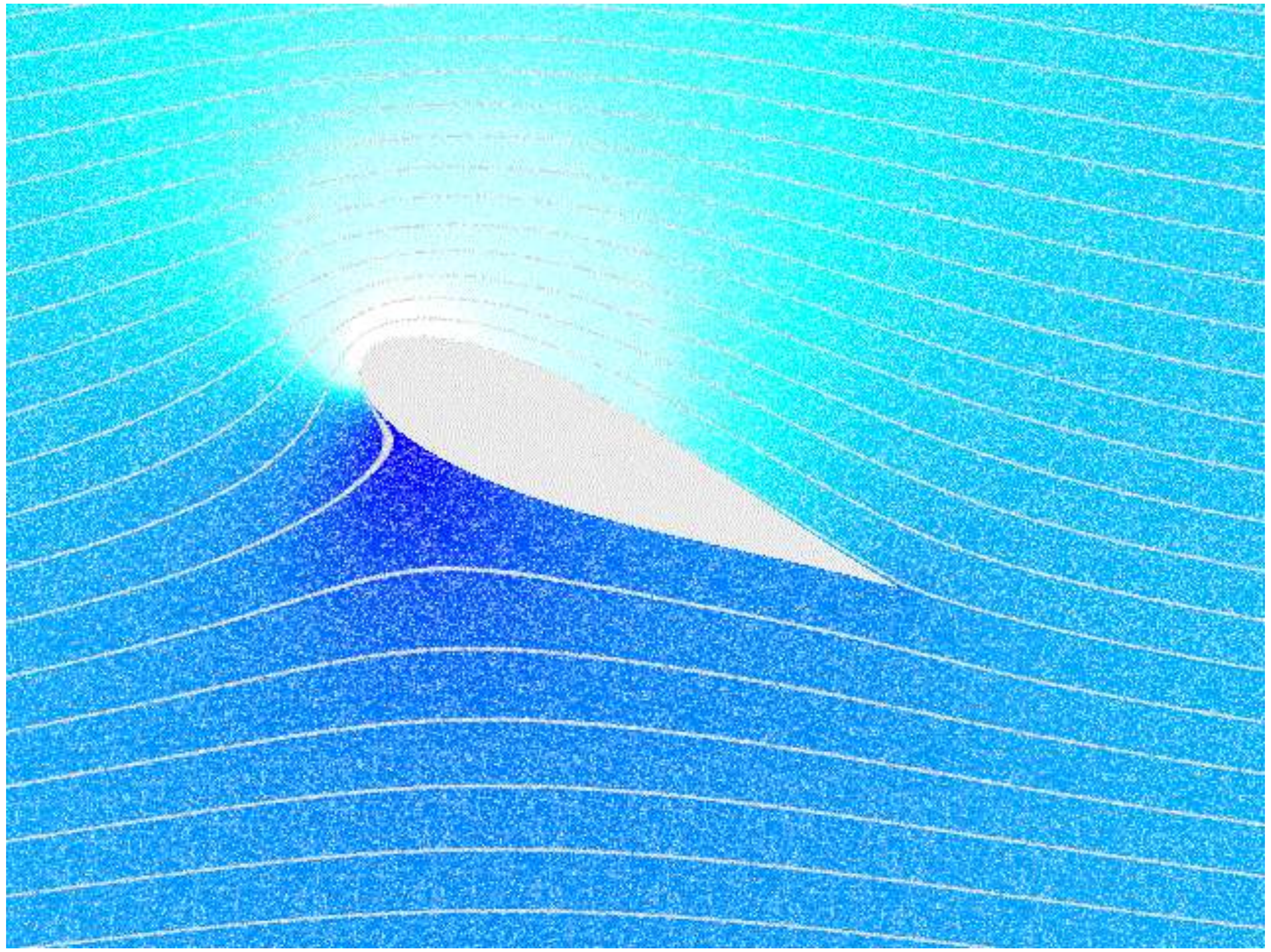
Enfin, notons que dans cette équation le second terme contient deux fois la vitesse: on dit que l'équation est non-linéaire. En pratique, les équations non-linéaires sont très dures à résoudre. Ainsi, l'équation d'Euler n'a pas de solution générale: on ne connait des solutions que dans des cas particuliers. L'existence et l'unicité d'une solution en général n'est pas non plus établi mathématiquement. D'un point de vue physique, on sait que ce doit être vrai, et en pratique on trouve des solutions quand on en a besoin, donc prouver que cela existe en général n'apportera rien à la physique. Néanmoins, le démontrer mathématiquement fait parti des "problèmes du millénaire" et rapporte 1 000 000 d'euros à qui le résoudra: avis aux amateurs.

Illustration de l’équation d’Euler: la portance

L’équation d’Euler n’est rien d’autre qu’un bilan de quantité de mouvement. Pour illustrer cela, considérons le problème de la portance: comment fait un avion pour voler?

Tout repose sur la forme de l’aile: celle-ci est dirigée vers le bas, de sorte que le flot d’air arrivant face à l’aile est poussé vers le bas. Comme on le voit sur le solution à droite, après l’aile, l’air va légèrement vers le bas. Il a donc subi une force de l’aile le poussant vers le bas. Or, d’après la troisième loi de Newton, si l’aile exerce une force sur l’air, l’air exerce la force inverse sur l’aile: on en déduit que l’air pousse l’aile vers le haut, c’est la **portance**. L’équation d’Euler transcrit simplement ce principe en équation.

Le principe est identique pour une voile de bateau face au vent.



Equation de Bernoulli

L'équation d'Euler est difficile à résoudre en pratique. Ainsi, dans les cas simples, on peut préférer l'équation de Bernoulli, qui est l'équivalent de la conservation de l'énergie pour le cas d'un fluide parfait. Celle-ci nous dit:

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + P = \text{constante}$$

Le premier terme est l'énergie cinétique volumique. Le deuxième est l'énergie potentielle de pesanteur volumique. Le troisième est l'effet des forces de pression. Enfin, la somme du tout est une constante de l'espace et du temps.

<u>Une illustration ludique:</u> souffler sur une feuille de papier. L'air soufflé augmente sa vitesse et donc diminue sa pression. La dépression créée attire donc la feuille de papier.

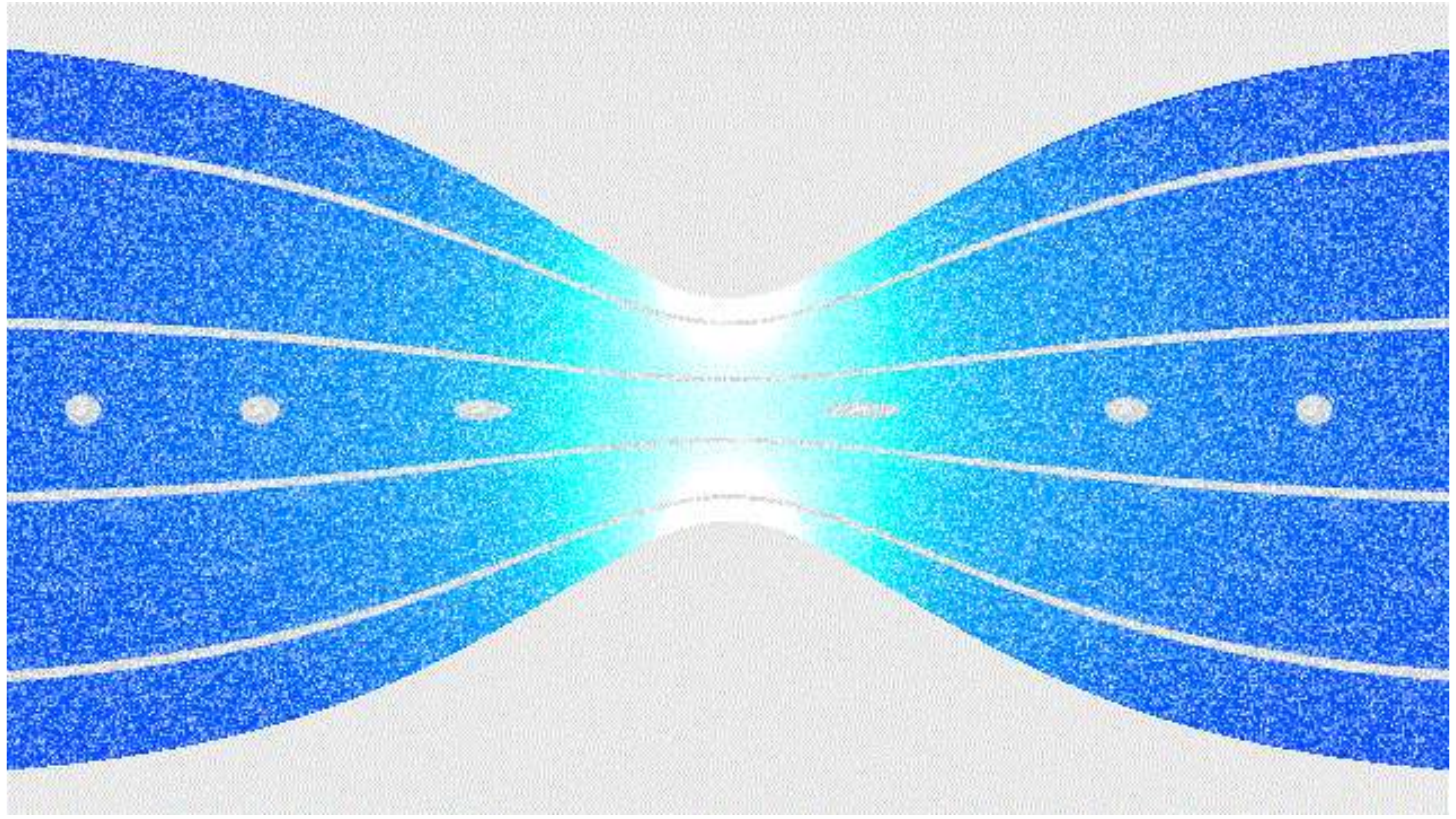
Daniel Bernoulli
1700-1782

Effet Venturi

Lorsqu'il y a une rétrécissement du passage, la conservation de la masse implique une accélération de l'air, c'est l'**effet Venturi**. De plus, l'équation de Bernoulli implique que cela génère une dépression.

<u>Exemple:</u> dans une rue entre des immeubles, autour d'une montagne à traverser.

En pratique, l'effet Venturi est utiliser pour baisser la pression, afin de générer une transition de phase par exemple.



Giovanni Venturi
1746-1822

Quatrième partie:

Viscosité et équations de Navier-Stokes

Viscosité

De même que la température peut diffuser du fait de l'échange des molécules par agitation thermique dans un fluide, la vitesse peut se diffuser par le même principe: c'est la **viscosité**. En conséquence, dans un fluide, s'il y a des variations spatiales de la vitesse, il y aura une diffusion de cette vitesse qui tendra à atténuer ces variations.

La viscosité d'un fluide se visualise bien: plus un fluide est visqueux, plus il a de mal à s'écouler. Ainsi, comme on s'y attend le miel est plus visqueux que l'eau, c'est-à-dire que la vitesse s'y diffuse plus rapidement.

Notation: η
Unité: Pa.s

Equations de Navier-Stokes

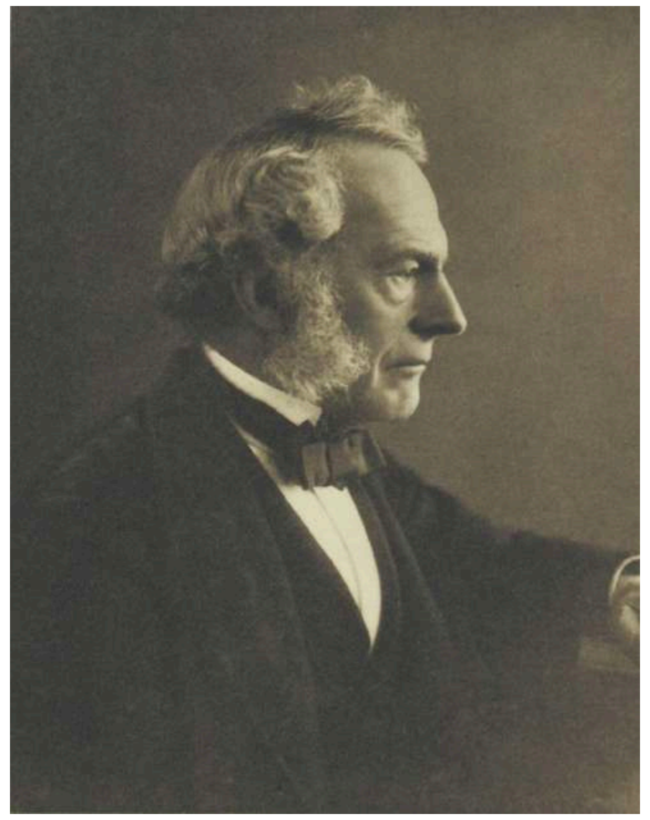
Puisque la viscosité diffuse la vitesse, elle a un impact sur la dynamique des fluides. Il faut donc corriger l'équation d'Euler, qui n'est valide que pour des fluides parfaits, c'est-à-dire sans viscosité.

L'équation du moment devient alors:

$$\rho\partial_t u_x + \nabla \cdot (u \times \rho u_x) = -\nabla_x P + \rho g_x + \eta \nabla^2 u_x$$

Ce sont, avec l'équation d'incompressibilité, les équations de Navier-Stokes.

Henri Navier
1785-1836



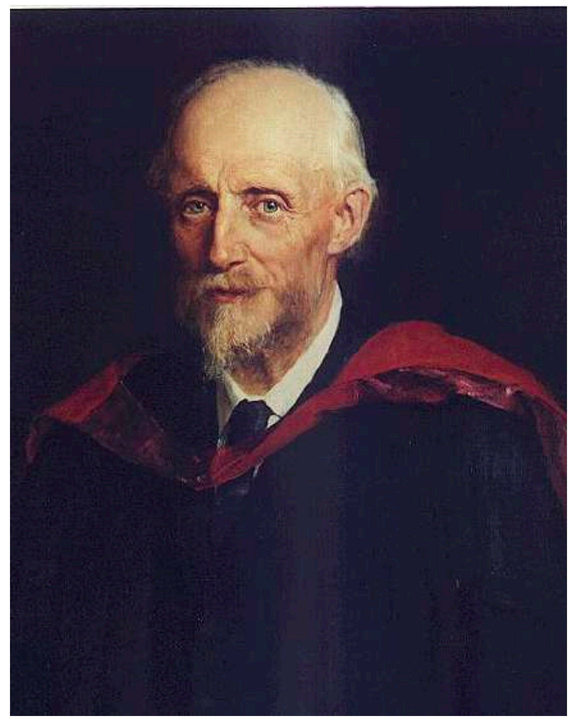
George Stokes
1819-1903

Nombre de Reynolds

Rappel de Navier-Stokes:

$$\rho \partial_t u_x + \nabla \cdot (u \times \rho u_x) = -\nabla_x P + \rho g_x + \eta \nabla^2 u_x$$

En pratique, la dynamique d'un fluide est-elle dominée par la viscosité ou par l'advection?



Osborne Reynolds
1842-1912

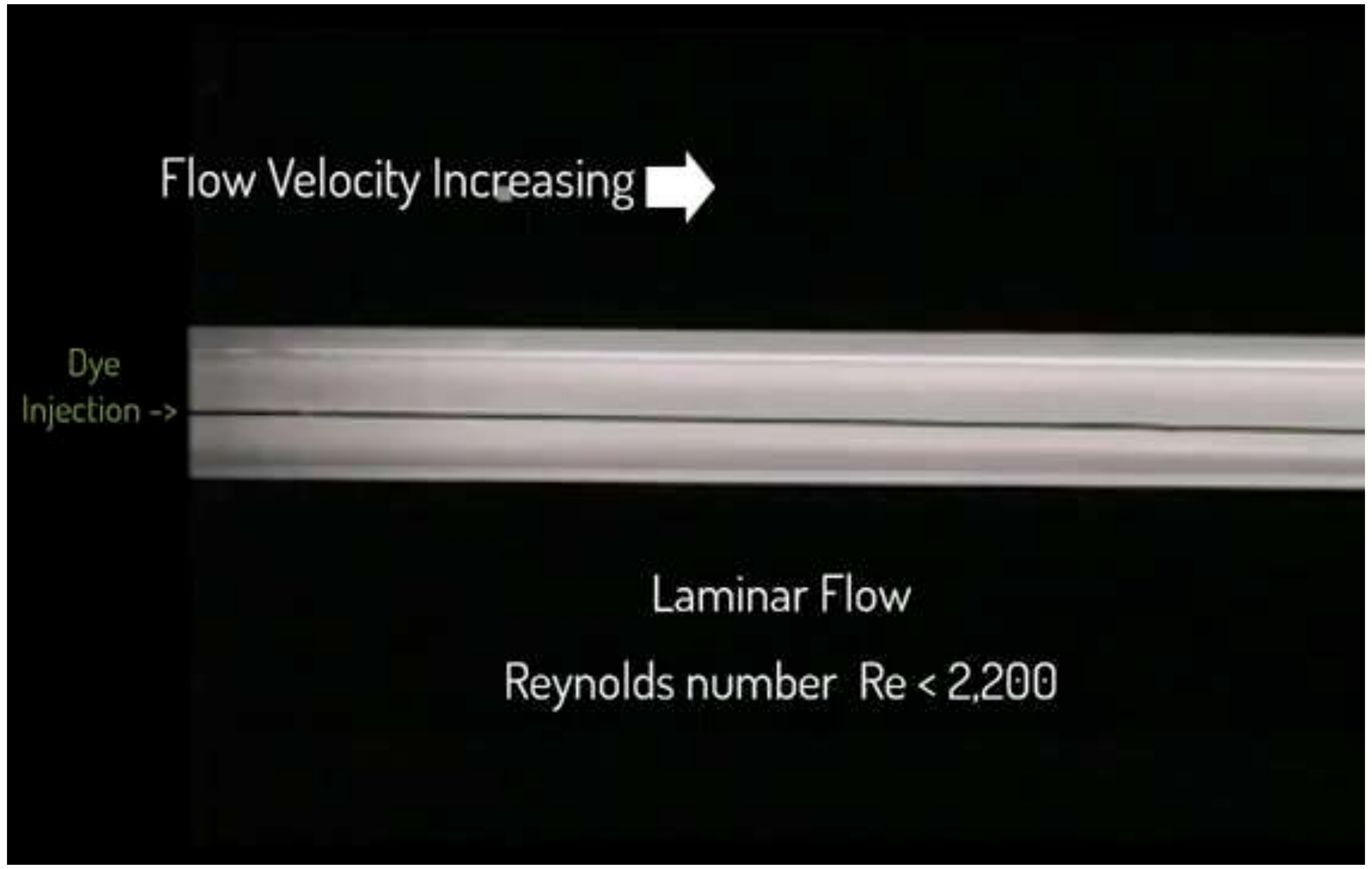
Ces deux modes peuvent être comparés à l'aide du nombre de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{advection}}{\text{viscosity}} = \frac{uL}{\eta}$$

Quand le nombre de Reynolds est grand, on peut négliger la viscosité et utiliser l'équation d'Euler. Lorsque le nombre de Reynolds est petit, on petit négliger le terme d'advection, et on obtient une équation linéaire nommée équation de Stokes.

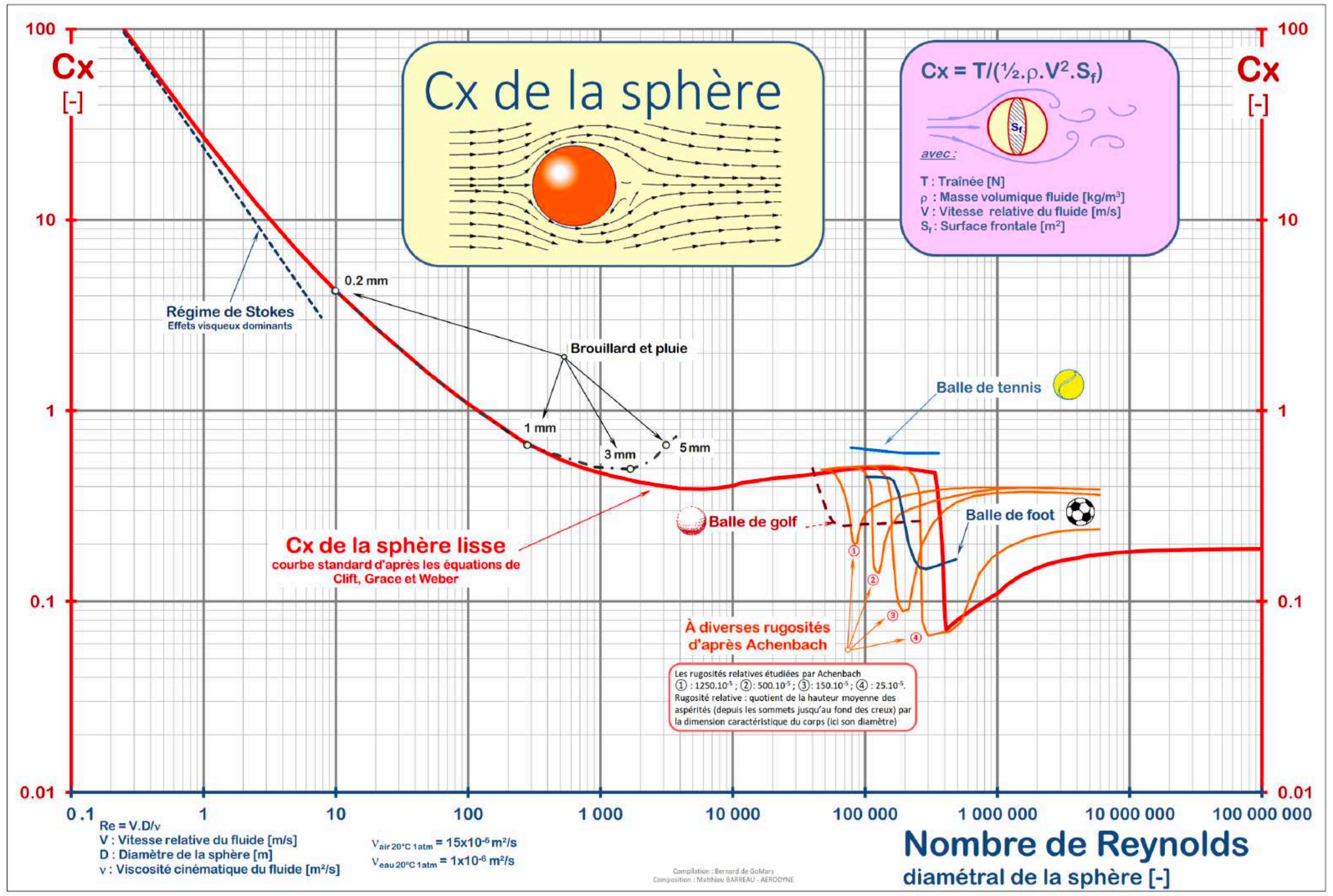
Le nombre de Reynolds est proportionnel à la vitesse et à la dimension du sytème. Aussi, l'advection domine à grande échelle et pour de grande vitesse, alors que la viscosité domine à petite échelle et faible vitesse.

A grand nombre de Reynolds, le flot est turbulent: très désordonné avec de nombreux tourbillons. A petit nombre de Reynolds le flot est laminaire: très lisse.



Couche limite et frottement

Proche d'une parois, la distance caractéristique devient la distance à l'interface. Aussi, il y a toujours un moment où le nombre de Reynolds devient petit proche de la parois. L'idée physique est que la parois colle le fluide du fait de sa viscosité. Dans un écoulement turbulent, on se retrouve alors avec une très fine couche proche des parois qui est visqueuse. C'est la **couche limite**.



Le **frottement** d'un objet dans un flot a deux régime distincts:

- A faible nombre de Reynolds: Le frottement est visqueux. La force est proportionnelle à la vitesse.
- A grand nombre de Reynolds: Le frottement est turbulent. La force est proportionnelle au carré de la vitesse.

Cinquième partie:

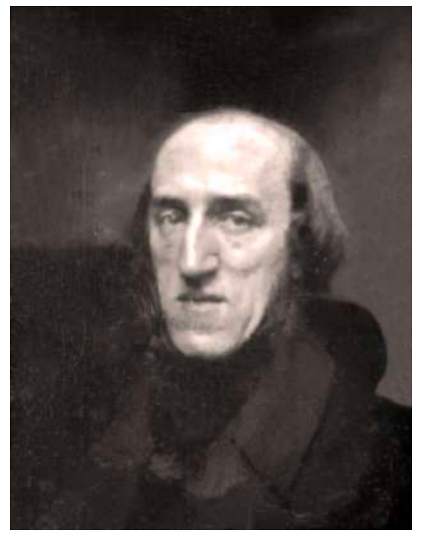
Instabilités hydrodynamiques

Instabilité

<u>Définition:</u> une instabilité correspond à une situation d'équilibre qui n'est pas stable. C'est-à-dire qu'une petite perturbation suffira à casser cette équilibre.

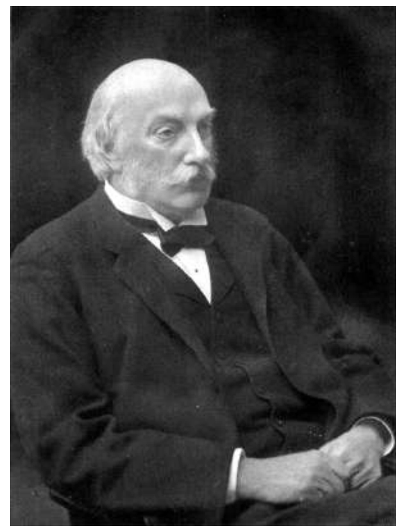
<u>Propriété:</u> une instabilité est lié à une brisure de symétrie. Par exemple pour la boule représenté à droite, elle pourra chuter à gauche comme à droite: il y a une symétrie miroir. Or, dans une situation symétrique il n'y a aucune raison d'aller d'un côté plutôt que de l'autre: on est donc à l'équilibre. En revanche, il suffit d'une petite perturbation pour **briser la symétrie**: on peut donc quitter cet état instable.

En hydrodynamique, la symétrie en question sera généralement une symétrie de translation: c'est-à-dire que le système restera le même quitte à le décaler dans une certaine direction. En pratique, il existe toujours des fluctuations dans un fluide, ce qui mènera à une brisure de symétrie si un certain **paramètre critique** est suffisamment grand. Ces fluctuations sont aléatoires, on ne peut donc pas prédire où aura lieu la brisure de symétrie. En revanche, on va voir que cette brisure a lieu selon un certain mode, c'est-à-dire de façon périodique avec une certaine **longueur critique**.



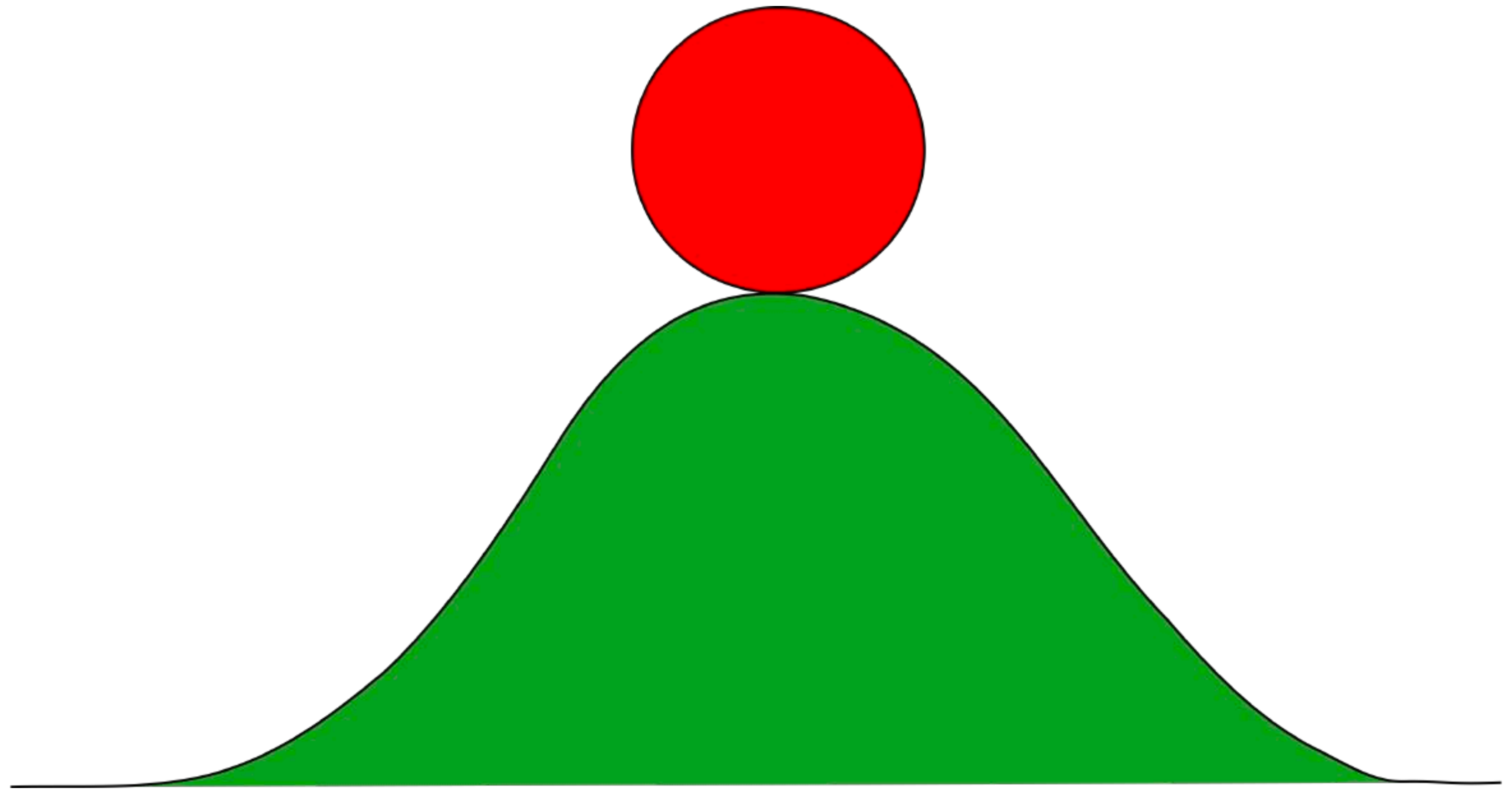
Joseph Plateau
1801-1883

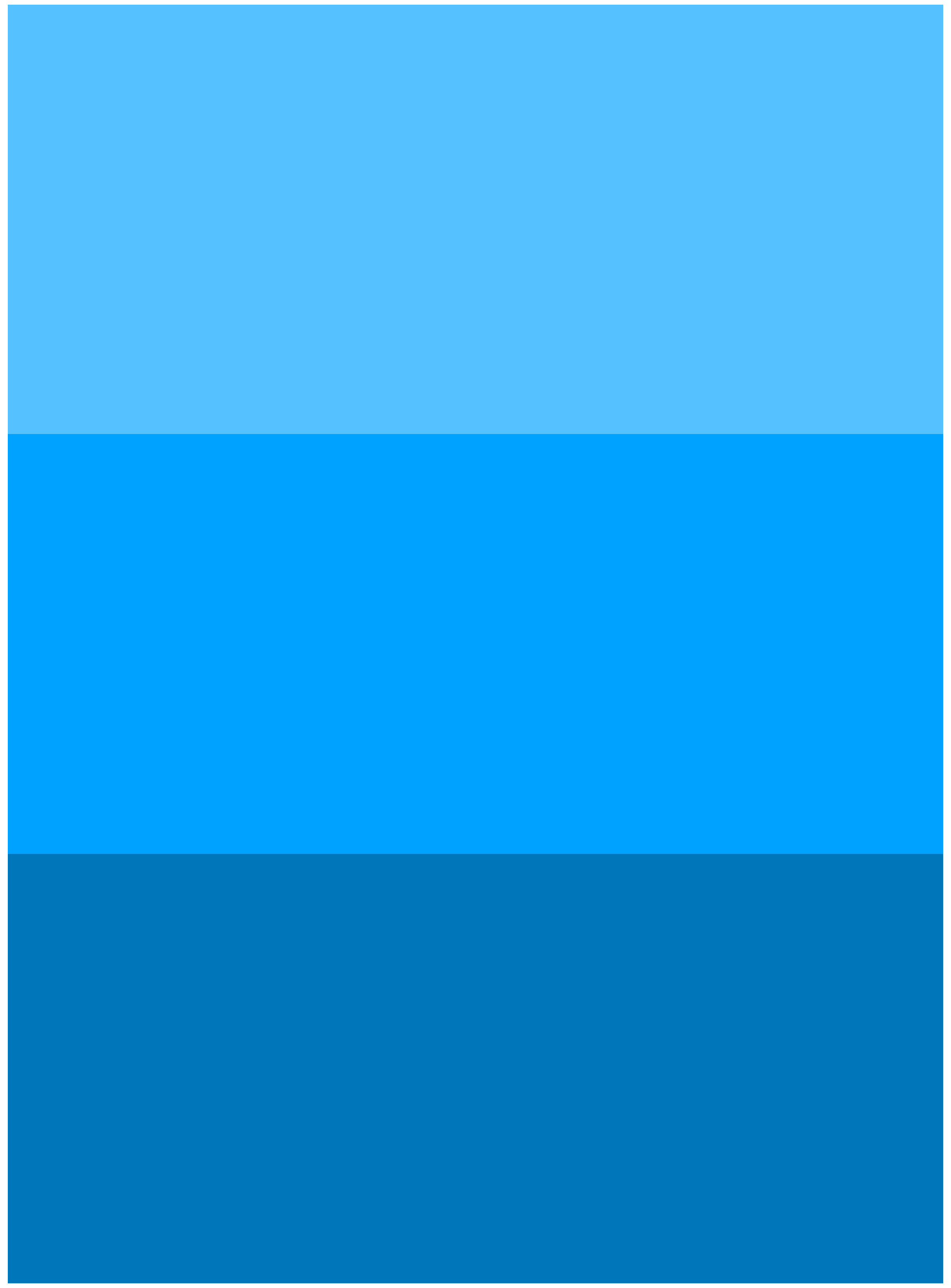
Hermann von
Helmholtz
1821-1894



John Strutt
Lord Rayleigh
1842-1919

Henri Bénard
1874-1939
Normalien





Instabilité de Rayleigh-Bénard

Situation initiale: un fluide froid au dessus d’un fluide chaud.

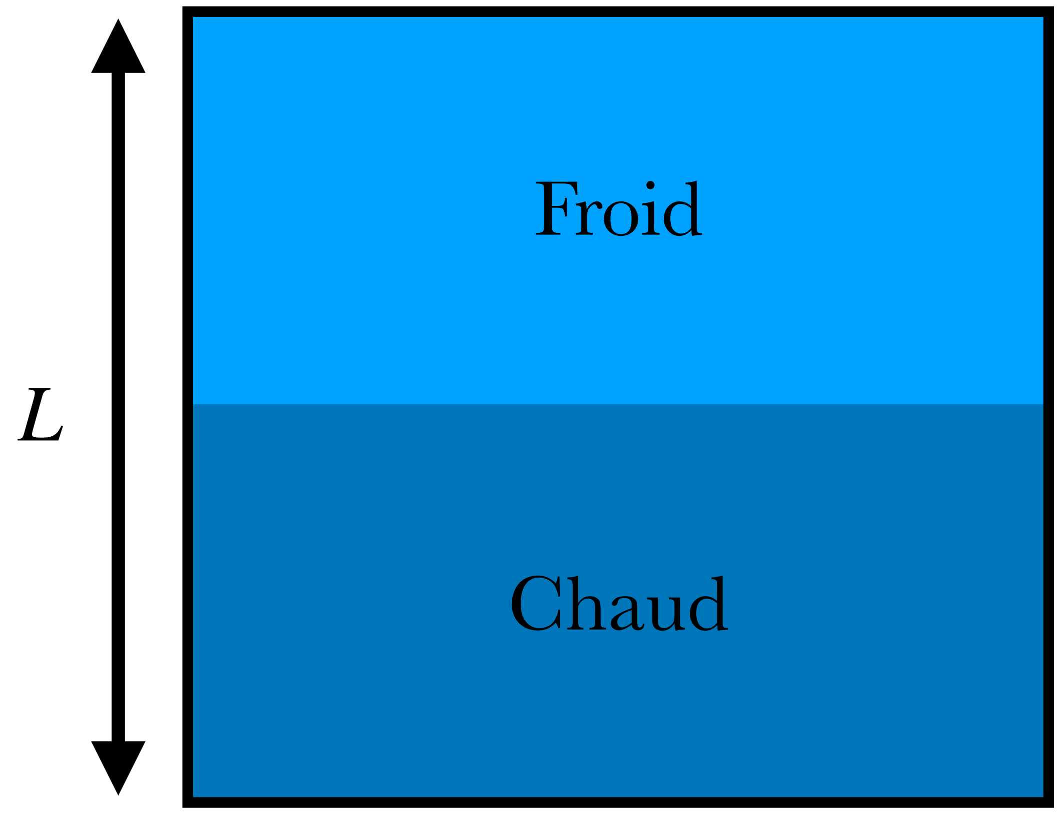
Situation finale: création de rouleaux de convection.

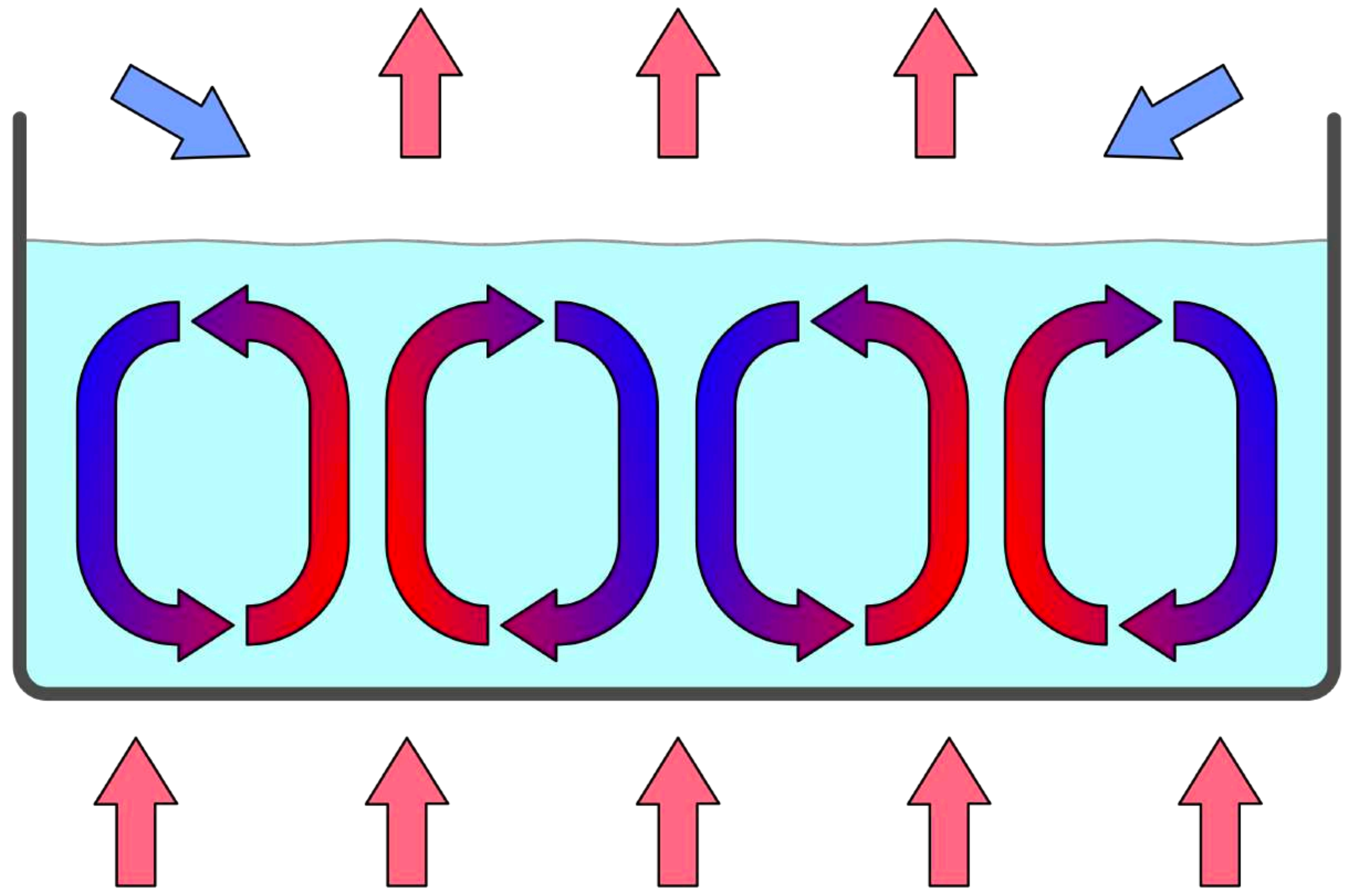
Brisure de symétrie: la symétrie de translation est brisée par le choix de la position des rouleaux.

Longueur critique: les rouleaux vise à être circulaire donc de longueur L.

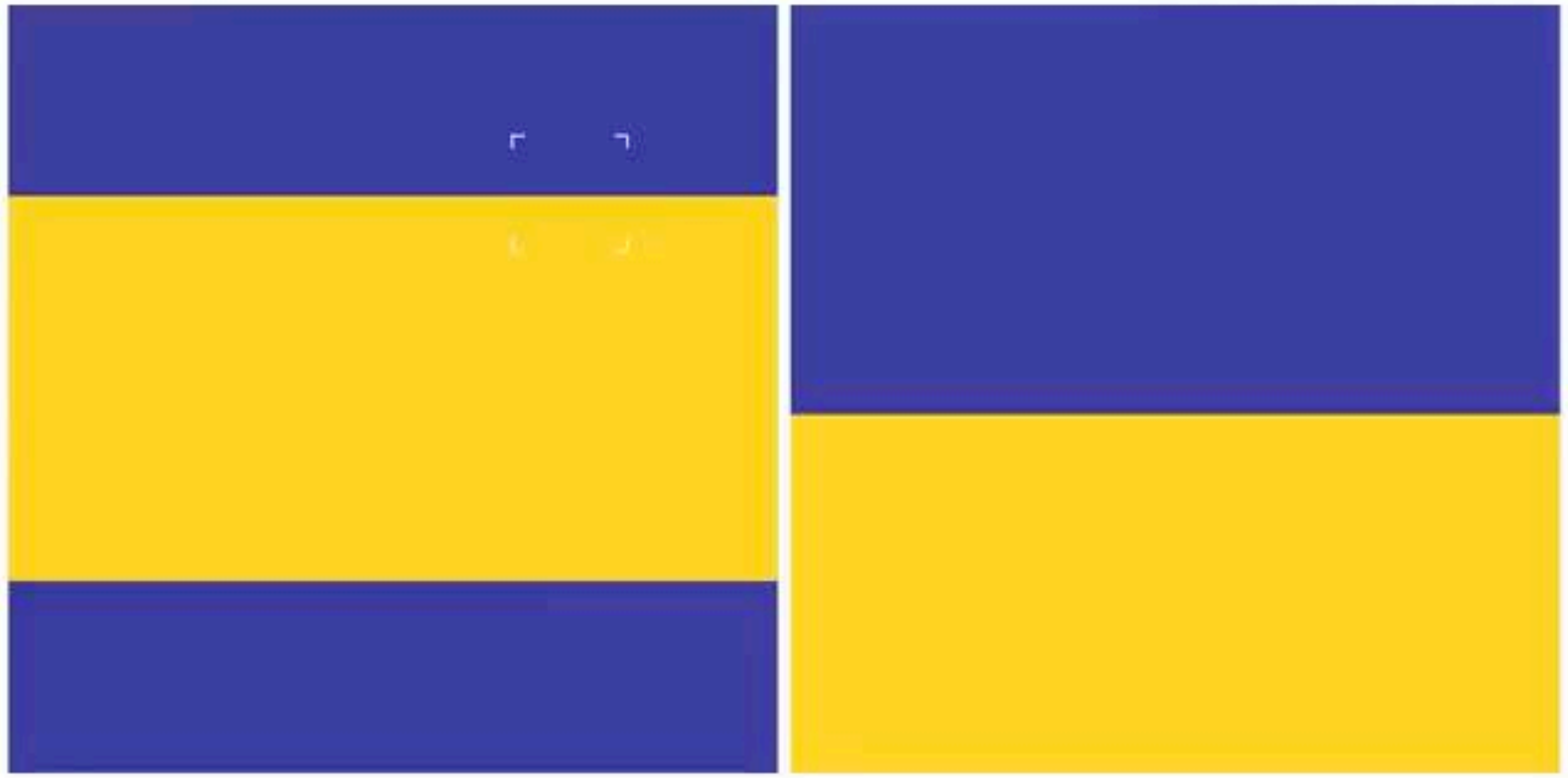
Paramètre critique: proportionnel à la différence de température et au cube de la longueur L. La convection a donc besoin d’une grande variation de température et surtout d’assez de place.

Exemple: l’eau des pâtes qui boue ou le déplacement des plaques tectoniques.





Instabilité de Kelvin-Helmholtz



Situation initiale: un fluide rapide au dessus d'un fluide immobile.

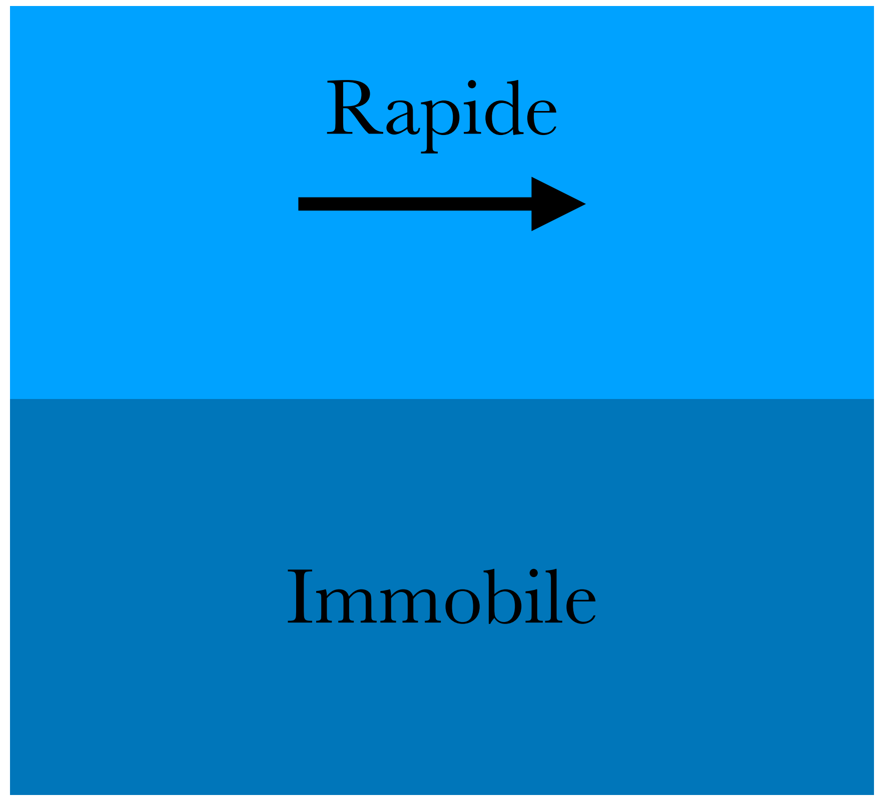
Situation finale: création de "vagues".

Brisure de symétrie: la symétrie de translation est brisée par le choix de la position de ces vagues.

Longueur critique: proportionnelle à la différence de vitesse divisé par la viscosité. Plus c'est rapide plus les vagues sont longues. Plus le fluide est visqueux moins les vagues sont longues.

Paramètre critique: toujours instable.

Exemple: très présent en météorologie, par exemple dès un obstacle comme une montagne crée des variations verticales de vitesse.



Instabilité de Plateau-Rayleigh

<u>Situation initiale</u>: un fluide lourd tombe dans un fluide léger. Ici la tension de surface joue un rôle important.

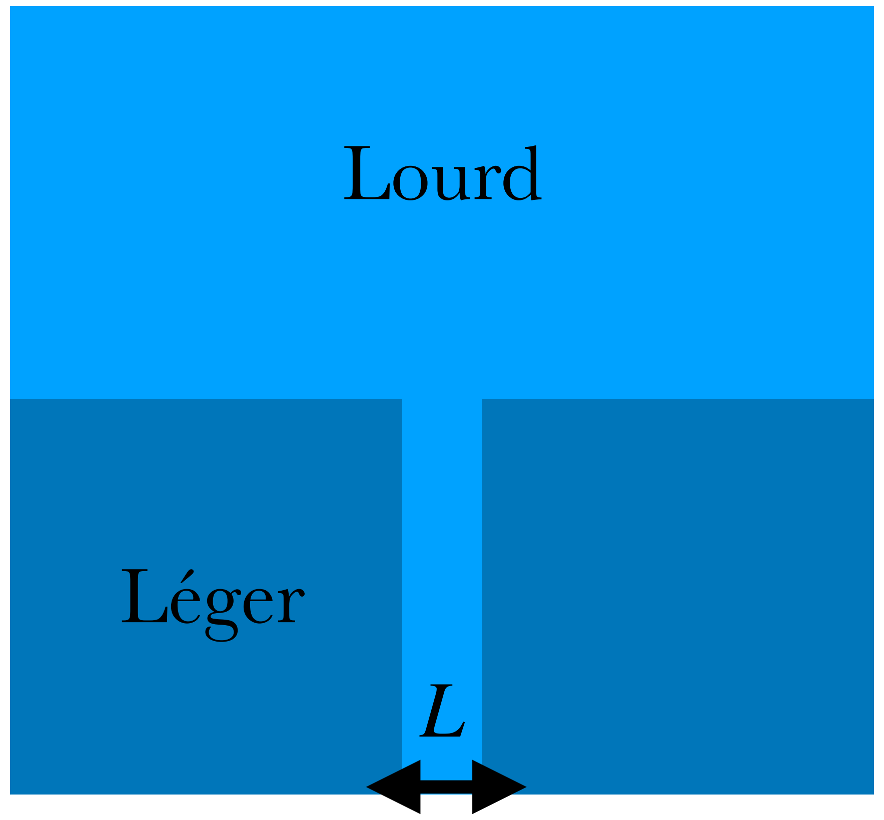
<u>Situation finale:</u> création de gouttes.

<u>Brisure de symétrie:</u> la symétrie de translation verticale est brisée par le choix de positions des gouttes.

<u>Longueur critique:</u> les gouttes tendent à être circulaire et espacées d'environ 1,5 fois la largeur du jet.

<u>Paramètre critique:</u> la largeur du jet doit être petite par rapport à la longueur capillaire.

<u>Exemple:</u> écoulement de l'eau de pluie, du robinet ou principe de l'imprimante.



Questions!

Prochain cours:
Physique du climat 1

Modèles du climat et réchauffement climatique